La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes

Mathematical modeling in teachers' training process

ZALDÍVAR ROJAS José David
QUIROZ RIVERA Samantha Analuz
MEDINA RAMÍREZ Gonzalo

Recibido: agosto 26 de 2017 | Aceptado para publicación: octubre 12 de 2017

Resumen
El presente estudio tiene como propósito promover la importancia de los procesos de aprendizaje e implementación del concepto modelación matemática en la formación docente inicial y/o continua. Para ello se describe una propuesta que tiene como fin el que los docentes experimenten y resuelvan una situación basada en modelación matemática tomando estos el rol de alumnos. Se discuten primeramente los aspectos teóricos que sustentan la propuesta y se presentan las dos fases que conforman

José David Zaldívar Rojas. Profesor de tiempo completo de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila, México. Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). Miembro del Sistema Nacional de Investigadores en el nivel de candidato. Sus líneas de investigación se enfocan principalmente en estudios de construcción social del conocimiento matemático y sobre los procesos de desarrollo profesional del docente de matemáticas bajo una perspectiva de modelación. Correo electrónico: david.zaldivar@uadec.edu.mx.

Samantha Analuz Quiroz Rivera. Investigadora posdoctoral en el Departamento de Matemáticas de la Université du Québec à Montréal, Canadá. Doctora en Innovación Educativa con acentuación en Matemática Educativa por el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel I. Sus líneas de investigación están enfocadas al estudio de la formación docente a través de la modelación matemática, así como al aprendizaje de conceptos matemáticos en ambientes socioculturales. Correo electrónico: samanthaq.rivera@gmail.com.

Gonzalo Medina Ramírez. Profesor de nivel medio superior y asesor de Ciencias Exactas en el Liceo Alberto del Canto, de Saltillo, México. Maestro en Docencia por la Universidad Autónoma del Noreste AC. Egresado de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Universidad Autónoma de Coahuila y actualmente cursa sus estudios de maestría en Matemática Educativa en la FCFM. Ha participado en diversos coloquios y simposios de educación matemática relacionados al uso de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas. Correo electrónico: gonzalo666@hotmail.com.

el estudio. Los resultados muestran un diseño de una situación basada en un contexto biológico cuyas tareas se inscriben propiamente en las etapas del proceso de modelación matemática. En dicha situación se incorpora una herramienta tecnológica con el propósito de favorecer el tránsito entre el planteamiento del problema y la generación de modelos matemáticos.

Palabra clave: MODELACIÓN MATEMÁTICA, FORMACIÓN DE DOCENTES, TECNOLOGÍA, PROBABILIDAD, PROPORCIÓN.

Abstract

The present study aims to favor the processes of learning and implementation of mathematical modeling notion pre-service and in-service teachers' training. In order to achieve so, we describe a proposal which main goal is teachers experiment and solve a situation based on mathematical modeling process by taking a student's role. We first discuss the theoretical aspects that support the proposal and present the two phases that make up the study. The results exhibit a design of a situation that takes place in a biological context whose tasks are properly inscribed in the phases of mathematical modeling process. In our example of situation, a technological tool is incorporated with the purpose of assisting the transit between the set out of the problem and the production of mathematical models.

Key Words: MATHEMATICAL MODELING, PRE-SERVICE TEACHERS, INSERVICE TEACHERS, TECHNOLOGY, PROBABILITY, PROPORTION.

Introducción

De acuerdo con Flores (2006), una condición para que el investigador se convierta en un agente de cambio educativo es la vinculación con escuelas donde se apoye al docente en la incorporación de resultados de investigación en su práctica diaria. Específicamente, parte de la investigación en didáctica de las matemáticas ha hecho numerosas aportaciones al estudio de situaciones y estrategias para la enseñanza de contenidos matemáticos; sin embargo, incorporar estas situaciones en un salón de clases demanda la vinculación constante con los docentes a través de reflexiones en su formación inicial y continua.

La presente investigación está centrada en una estrategia que ha demostrado su efectividad para el aprendizaje de las matemáticas a través de sus aplicaciones: la modelación matemática. En su acepción como estrategia didáctica, la modelación matemática surge como un medio que permite la creación o uso de modelos matemáticos a través del planteamiento de problemas en contexto (Niss, Blum y Galbraith, 2007). La implementación de esta estrategia en diversos niveles educativos ha demostrado, entre otras cosas, el desarrollo de competencias matemáticas y propias de la modelación matemática (Rodríguez y Quiroz, 2015), la promoción de un mayor interés hacia la asignatura (Alsina, 2007), así como el desencadenamiento de un pensamiento diversificado en los alumnos (Hitt, 2013).

Es por ello que currículos de diversos países han incorporado como un objetivo principal del perfil de egreso el desarrollo de competencias de modelación matemática. A manera de ejemplo, México, a través de la Reforma Integral de Educación Básica del año 2009, manifiesta la necesidad de que los alumnos modelicen situaciones de la vida cotidiana desde el preescolar hasta la secundaria (SEP, 2011). Por otro lado, la OCDE la considera dentro de los estándares evaluados en la prueba PISA (OCDE, 2010).

Ahora bien, una correcta aplicación de la modelación matemática en el aula de clases demanda un docente preparado y convencido para tal acción. A pesar de ello, la modelación matemática sigue ausente en la mayoría de los currículos de la formación inicial de docentes. Esto implica que sin la debida formación y desarrollo continuo, el docente sería incapaz de desarrollar planeaciones didácticas basadas en la modelación matemática y por consiguiente ser exitoso en su aplicación.

Ahora bien, la presente investigación reconoce que el aprendizaje de la modelación matemática por parte de los docentes no debe restringirse al conocimiento de la definición de la misma. Es necesario un trabajo de reflexión sobre la práctica que permita al docente valorar los beneficios de la modelación, reconocer las dificultades de su implementación y modificar sus concepciones respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, puesto que en la mayoría de los casos están ligadas a procesos memorísticos de transmisión de conocimiento (Quiroz, Hitt y Rodríguez, 2015).

Por lo tanto, en el presente estudio se plantea una propuesta para el estudio e implementación de la modelación matemática en la formación inicial o continua de docentes. A través de esta propuesta se busca que los docentes experimenten una situación basada en la modelación matemática con el fin de que reconozcan sus características y particularidades, así como el tipo de tareas que se pueden generar. En un primer momento se muestra la justificación teórica de la propuesta para después presentar los momentos y tareas específicas que la conforman. Dentro de estas tareas se involucra una componente tecnológica con el fin de valorar la incorporación de estos recursos en el desarrollo del ciclo de modelación utilizado.

La noción de modelación matemática

El estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han mostrado la necesidad de promover actividades en el aula que vayan más allá de un cúmulo de saberes aislados y algoritmos descontextualizados realizados mecánicamente, como tiempo atrás se creía. Está demostrado que las fallas en la impartición de matemáticas puras que dejan las aplicaciones para otras asignaturas, conllevan a bajo rendimiento de los alumnos por la carencia de aprendizaje (Santos, 1997).

De acuerdo con Alsina (2007), es necesario recordar la razón principal por la que son enseñadas las matemáticas: lograr que los alumnos se conviertan en seres capaces de aplicar las matemáticas y transferir dichos conocimientos en una variedad de contextos y situaciones fuera de la escuela. Por ello, la habilidad de identificar y resolver problemas en su ambiente cultural es un objetivo importante en la asignatura de matemáticas, ya que con ello se logrará preparar ciudadanos críticos y buenos profesionistas en cualquier contexto que se les presente (Muller y Buskhardt, 2007).

En nuestra investigación consideramos al aprendizaje de la matemática como un proceso donde se encuentra sentido a las relaciones, se separan y analizan para discutir sus conexiones con otras ideas, como lo refieren Niss *et al.* (2007). Así, se muestra como necesaria la realización de cambios significativos en la manera de pensar de los estudiantes sobre las matemáticas mediante la presentación de situaciones donde se fomente la expresión de ideas y confrontación de procedimientos.

Con el fin de alcanzar estos objetivos, se inicia el estudio de una estrategia que potencia el vínculo entre la matemática escolar y la experiencia de vida de los estudiantes: la modelación matemática (Lesh y Yoon, 2007). La definición de la modelación matemática se ha ido enriqueciendo desde que Pollak en 1969 puntualizó los pasos o etapas que la conformaban:

- Identificar una pregunta del mundo real que se quiere entender.
- Seleccionar objetos particulares importantes para la pregunta hecha e identificar relaciones entre ellos.
- Decidir cuáles son útiles e ignorar los que no lo son.
- Trasladar esta versión en términos matemáticos, obtener fórmulas matemáticas para esta pregunta determinada y resolver el problema.

Posteriormente, Blum y Niss (1991) completan esta acepción considerando a la modelación matemática como el proceso completo de transitar desde un problema planteado en una situación real hasta un modelo matemático. En la presente investigación consideraremos la definición de Trigueros (2006), quien la detalla como un proceso cíclico donde se proporciona a los alumnos problemas abiertos y complejos en los que se ponen en juego conocimientos previos y habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el comportamiento del fenómeno en términos matemáticos.

Para la investigación son tres momentos principales los que deben seguirse en clases basadas en modelación matemática:

- Momento 1. Introducción al contexto real.
- Momento 2. Matematización de la situación a partir de los datos del contexto.
- Momento 3. Síntesis y regreso al contexto real.

Durante estos momentos, tanto docente como alumnos cumplen roles específicos que detallaremos a continuación:

a) Rol del alumno. De acuerdo con Lakoma (2007), existen tres tareas básicas de los alumnos en el proceso de modelación: realizar predicciones y conclusiones, generalizarlas, justificarlas y aplicarlas a la práctica y, por último, presentarlas a otras personas. Durante este proceso los alumnos sugieren situaciones de su realidad y crean modelos para dichos escenarios específicos. Estas acciones promueven el desarrollo de habilidades matemáticas y herramientas que les permitan representar, estimar, llegar a aproximaciones, analizar errores, razonar, revisar la inconsistencia de soluciones y comunicar sus resultados (Pollak, 2007).
b) Rol del docente. Los resultados de Doerr (2007) muestran que las actividades del docente en modelación matemática estriban en la elección de la situación que se va a modelar de acuerdo con el contenido que desea tratar, buscando la situación más apropiada, la proposición de situaciones donde los alumnos puedan interpretar, explicar y justificar modelos matemáticos, así como motivar a compartir su manera de pensar.

Ahora bien, estos roles se realizan dentro de un aula de clase que privilegie el aprendizaje colaborativo. Así, se invita a conjuntar esfuerzos, intereses, talentos y competencias para el cumplimiento de metas establecidas en conjunto por los miembros del grupo que apoyan la comprensión de los problemas y procedimientos de solución. El trabajo colaborativo en la modelación matemática permite interacciones que favorecen un ambiente social y la promoción de discusiones para la solución de problemas más complejos (Alsina, 2007).

Por último, el ambiente en el salón de clase debe permitir la descripción de los modelos individualmente, en equipo o grupalmente. El aula de clase se convierte en un espacio creativo donde el aprendizaje se construye por todos los miembros del grupo, se promueve la participación en la discusión de problemas y la propuesta de ejemplos y contraejemplos; es decir, la construcción del conocimiento matemático (Santos, 1997).

Tomar en cuenta las características y rasgos relevantes del trabajo con la modelación matemática es indispensable para la obtención de logros en su aplicación.

La modelación matemática en la formación docente

De acuerdo con Latapí (2003), alcanzar una mejora en la educación requiere retomar como asunto central la formación de los maestros, puesto que este proceso constituye la vía por la que el sistema renueva sus prácticas, cuestiona sus tradiciones, acepta nuevas visiones teóricas, se abre al conocimiento y se revitaliza. A pesar de ello, la formación docente es considerada uno de los elementos más débiles del sistema educativo, puesto que en su mayoría contempla programas obsoletos y el empleo de métodos de enseñanza rutinarios (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004). Por tanto, lograr cambios en las aulas de clase de matemáticas será posible a través de cambios en la formación de docentes (Alsina, 2007).

Es necesario reconocer que la formación de docentes en la enseñanza de las matemáticas en general se ha convertido en un tema pedagógico central en los últimos años. Los esfuerzos se encaminan a la creación de nuevos espacios donde el docente tenga la oportunidad de reflexionar sobre su enseñanza, lo cual requiere una madurez considerable respecto al conocimiento que domina, la pedagogía de las matemáticas que posee y del aprendizaje del alumno (Wilson y Cooney, 2002). Da Ponte (2012) menciona que una enseñanza de las matemáticas de calidad pasa necesariamente por un profesor con una formación matemática apropiada, con competencias en el campo didáctico, con una buena relación con los alumnos, una actitud profesional y su capacidad de actualización a nivel profesional.

Actualmente, el reto de la educación docente estriba, pues, en diseñar una pedagogía que facilite el empleo de métodos constructivistas para la enseñanza de matemáticas en todos los niveles; es decir, preparando a docentes que enseñen matemáticas para su entendimiento y su aplicación y no su memorización (Nyaumwe, 2004).

En relación a la modelación matemática, su incorporación al currículo del profesor es considerado indispensable para el desarrollo de competencias docentes relativas a esta estrategia, como por ejemplo para el establecimiento de ambientes y el planteamiento de situaciones de modelación (Niss *et al.*, 2007). Sin embargo, las investigaciones demuestran que la mayoría de los programas educativos de maestros en formación no proveen conocimientos y experiencias que provoquen confianza en los docentes para lidiar con esta estrategia didáctica en el aula de clases (Alsina, 2007; Doerr, 2007).

A pesar de que es clara la necesidad de incorporar la modelación matemática al currículo de la formación docente, Doerr (2007) establece que son pocos los estudios que se enfocan en las formas en que se podría realizar esta incorporación. De hecho, Niss *et al.* (2007) afirman que es muy complejo encontrar *actividades de modelación genuinas* dentro del salón de clases de matemáticas. Según Ruiz-Higueras y García (2011), existe una escasez de investigaciones centradas en clarificar y aumentar el conocimiento científico sobre las metodologías involucradas en los procesos de modelación por parte de los docentes, así como la ausencia de teorías científicas que permitan describir con precisión y categorizar dichas metodologías.

Rescatamos dos investigaciones que proponen metodologías para el trabajo con docentes en formación con la modelación matemática. El estudio de Quiroz, Hitt y Rodríguez (2015) muestra que la incorporación de la modelación matemática al currículo de la formación docente debe ser un proceso gradual de reflexión donde los futuros docentes tengan oportunidad de evolucionar sus concepciones respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este proceso debe relacionar no solo aspectos teóricos relativos a la modelación, sino a su vez brindar oportunidades de poner en práctica la estrategia a través de la planeación e implementación de una lección de matemática con alumnos en aulas de clase. Estas oportunidades permitirán que el docente reconozca no solo los beneficios de la modelación matemática, sino que a su vez reflexione respecto a las dificultades de su incorporación.

Por su parte, Hitt (2013) desarrolla la metodología de enseñanza denominada Acodesa (aprendizaje en colaboración, debate científico y autorreflexión). Dicha metodología tiene como objetivo promover habilidades y capacidades de reflexión ante situaciones problemáticas mediante el modelado en ambientes colaborativos, en los cuales el debate científico y la autorreflexión juegan un papel de primer orden. Esta metodología promueve el trabajo con situaciones problemas basadas en modelación matemática. A través de Acodesa se ha dado lugar al desarrollo de cuerpos de actividades de aprendizaje dirigido a la formación de profesores como apoyo para la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria, como el caso de la investigación de Rodríguez y Soto (2011).

El uso de tecnología y la modelación matemática

La sociedad de la información y la comunicación de la que formamos parte, nos hace imposible no tener en consideración en las estrategias didácticas el involucramiento de tecnología. Al hablar de modelación matemática, los investigadores han incorporado a la tecnología como parte importante del mismo proceso en las aulas de clase de diversos niveles educativos.

Como resultado de esta incorporación está el despliegue de la autonomía de los alumnos respecto del docente, además del desarrollo de habilidades como la búsqueda de información y una mayor participación e interés en la clase (Castañeda, 2010). Por su parte, Medina (2011) indica en su trabajo la importancia del uso de tecnologías de la información en el desarrollo de competencias tanto matemáticas como de modelación matemática.

El momento preciso en el ciclo de modelación matemática para la incorporación de la tecnología ha sido estudiado por autores como Rodríguez y Quiroz (2015), cuyos resultados indican tres momentos importantes donde la tecnología puede apoyar el proceso de modelación matemática:

- Al momento de plantear una situación real. La tecnología podría apoyar a la mejor comprensión de la situación-problema que se plantea.
- Al momento de la formación de un modelo matemático. En este momento los recursos tecnológicos brindarían al alumno elementos para acercarse a la creación de un modelo matemático, e incluso vislumbrar la respuesta sin tener aún el resultado analítico.
- Al momento de vincular los resultados matemáticos con la situación real. La tecnología permite analizar la respuesta matemática en términos de la misma situación real. Además, apoya la identificación de posibles errores en los resultados del trabajo con el modelo matemático.

Así, estos resultados brindan directrices para la planificación de secuencias didácticas basadas en modelación matemática que incorporen un recurso tecnológico. Si se piensa en la formación docente, el uso de dispositivos tecnológicos apoyará el reconocimiento de las bondades de estos en el aula de clase de matemáticas, puesto que este tipo de inserciones modifican indudablemente la forma en la cual se producen, transmiten y se procesa la información y el conocimiento en los salones de clases, ya que afectan directamente al currículo, lo cual repercute –o debería repercutir– en la formación de los docentes (Llinares, 2012).

Propuesta para la incorporación de la modelación matemática en la formación docente

La presente propuesta tiene como objetivo apoyar el proceso de aprendizaje y utilización de la modelación matemática desde la formación de docentes. Es conocido que las estrategias didácticas que los docentes utilizan en sus aulas de clase están basadas en sus teorías sobre cómo esta asignatura debe ser aprendida. Estas ideas han sido desarrolladas con base en su experiencia sobre cómo fueron enseñados (Da Ponte, 1994). De acuerdo con el estudio de Quiroz *et al.* (2015), el aprendizaje de la modelación matemática por los docentes en formación puede realizarse a través de un trabajo en colaboración entre docentes donde se dé oportunidad de planificar e implementar secuencias didácticas con elementos de modelación.

Se presenta a continuación una propuesta para promover el aprendizaje y utilización de la modelación matemática desde la formación de docentes. Se busca así contribuir en el avance de teorías científicas que describan y expliquen la actividad del profesor en el aula durante los procesos de estudio en los cuales los alumnos se enfrenten a situaciones de modelización matemática (Ruiz-Higueras y García, 2011).

La propuesta consiste en el planteamiento de situaciones basadas en modelación que deban ser resueltas por los mismos docentes, experimentando por ellos mismos el rol del alumno. Estas situaciones deberán ser seguidas de un proceso de reflexión sobre lo ocurrido: el tipo de situación que se planteó, la adecuación del contexto, el rol del docente durante la experiencia, el rol de los alumnos, el proceso de creación, uso de un modelo matemático, la organización en el aula, el clima de aprendizaje, así como el uso de tecnología. De acuerdo con García (2005), el planteamiento y resolución de situaciones-problema mediante el trabajo en grupo promoverá un análisis o discusión en colectivo que brindará herramientas para una reflexión posterior respecto a la misma estrategia utilizada. Al experimentar las situaciones de modelación, se espera que los docentes desarrollen aprendizajes "haciendo", como propone Llinares (2012). Por otro lado, Ferreira y Miorim (2008) muestran que las reuniones de reflexión en colaboración entre docentes permiten la superación de problemáticas presentadas en las aulas, además de la incorporación de nuevas estrategias.

Ahora bien, las situaciones elegidas deberán estar acordes con contextos no matemáticos atractivos para los mismos docentes y que les generen un reto en sus conocimientos matemáticos. Esta selección será realizada por el profesor formador de docentes tomando en cuenta las características de sus alumnos, así como sus intereses. Además de ello, es recomendable que las situaciones involucren el uso de un recurso tecnológico, puesto que con ello será posible la discusión posterior relativa a la utilidad de este durante el proceso de resolución.

Las situaciones propuestas a los docentes, por tanto, deberán ser preparadas con anticipación, buscando que estas abarquen los tres momentos del proceso de modelación matemática: 1) introducción al contexto real; 2) matematización de la situación a partir de los datos del contexto; y, 3) síntesis y regreso al contexto real. Respecto a la incorporación de la tecnología, esta es recomendable hacerse siguiendo las sugerencias del estudio de Rodríguez y Quiroz (2015): al momento de plantear una situación real, al momento de la formación de un modelo matemático y al momento de vincular los resultados matemáticos con la situación real.

El formador de docentes podrá valerse de contextos que involucren otras asignaturas, promoviendo una transversalidad dentro del currículo. Ahora bien, el formador deberá conocer los aspectos teóricos y prácticos de la modelación matemática, puesto que fungirá el papel del docente de matemáticas promoviendo en todo momento la discusión de ideas entre los docentes en formación y guiándolos a través de la sesión de clase.

En el proceso de resolución de estas situaciones se busca promover en los docentes en formación una experiencia reflexiva, donde se les presenten retos cognitivos que les demanden la toma de decisiones e intervención en la clase. Por ello, se buscará que sean ellos quienes propongan soluciones y desarrollen un modelo matemático a fin de dar respuesta a este. Este proceso, de acuerdo con las características propias de la modelación mencionadas en la sección anterior, se debe realizar a través de un aprendizaje colaborativo entre futuros docentes.

La reiteración de estas experiencias brindará al docente más oportunidades para reflexionar sobre las mismas bondades y dificultades del trabajo con modelación desde el punto de vista del docente y desde el punto de vista del alumno. Entre estas dificultades se espera que se discutan algunas que ya fueron reportadas en diversas investigaciones, como lo son: un mayor tiempo para la clase de matemáticas en comparación con el uso de métodos tradicionales (Alsina, 2007), problemáticas propias del aprendizaje colaborativo, dificultad para seleccionar problemas apegados a la realidad del alumno (Henn, 2007), la desvinculación con evaluaciones tradicionales que solo valoran la destreza en la resolución de algoritmos (Henn, 2007) y problemas ligados a la necesidad de adquisición de equipamiento tecnológico en el aula (Pead, Ralph y Muller, 2007).

Consideraciones metodológicas

La presente investigación es de tipo cualitativa, puesto que tiene como intención comprender de manera detallada el tema de estudio de voz de los individuos que participan (Creswell, 2007). El diseño del estudio está organizado en dos fases principales, que como en toda investigación cualitativa pueden ser modificadas si así se requiere. Estas fases son las siguientes:

1. Fase de diseño. Primeramente se pretende diseñar una situación problema basada en modelación matemática para el trabajo con los docentes en formación. El diseño deberá seguir los aspectos teóricos referentes al proceso de modelación matemática que fueron referidos en las primeras secciones del artículo. Además, se pretende la selección y el involucramiento de una tecnología de acuerdo con los fines que se persigan, relacionados al contenido matemático.
2. Fase de implementación y análisis de resultados. Durante esta fase se pretende implementar el diseño realizado en la formación de docentes inicial y/o continua. Después de la resolución de la situación-problema se realizará una sesión de reflexión con los docentes sobre las actividades que se siguieron. Los resultados obtenidos serán analizados a la luz de los elementos teóricos. Los resultados permitirán mostrar la eficacia de esta implementación para el desarrollo de la noción de modelación matemática en la formación de docentes.

El presente artículo muestra los resultados de la primera fase del estudio; es decir, el diseño de la situación-problema. El objetivo principal es el diseño de una secuencia basada en modelación matemática que tome en cuenta los aspectos teóricos de la estrategia y el involucramiento de una tecnología de apoyo con el fin de promover el proceso de aprendizaje de la modelación matemática en docentes en formación inicial y continua. Se presenta en la siguiente sección el resultado de tal diseño.

Diseño de la situación basada en modelación matemática

Presentación de la situación y objetivo general

La situación que a continuación se presenta se denomina “La genética de acuerdo con las leyes de Mendel”, y el contexto bajo el que se inscribe se encuentra en la biología, específicamente en genética relativo a la segunda ley de Mendel. La temática del contexto se eligió de esa manera debido a su característica de transversalidad entre asignaturas. Abordar el planteamiento de la situación desde la biología y sin incluirlo en el título busca a su vez no explicitar el uso de matemáticas en el mismo planteamiento. Aunado a lo anterior, el tema aparece desde los primeros grados escolares y es recursivo en los siguientes años, aunque con diferentes niveles de profundidad. Además de que las aportaciones de Mendel representan un parteaguas en la biología que permitió el desarrollo de una rama de esta: la genética (Darden, 1991; Lorenzano, 2005; Gliboff, 2015).

El objetivo general de la situación de modelación matemática “La genética de acuerdo con las leyes de Mendel” es simular el comportamiento de la segunda generación de híbridos de cierta especie de guisantes, los cuales son el resultado de la primera cruza de dos guisantes puros, uno amarillo (gen dominante) y otro verde (gen recesivo). Se espera que a partir de dicha simulación los estudiantes puedan explicar intuitivamente la segunda ley de Mendel (ley de la segregación de los caracteres en la segunda generación filial), la cual establece que durante la formación de los gametos, cada alelo de un par se separa del otro miembro para determinar la constitución genética del gameto filial (Valega, s.f.).

Los conceptos matemáticos que son posibles abordar en la situación son: proporcionalidad, razones, eventos aleatorios, histogramas de frecuencia, probabilidad clásica, porcentajes, entre otros. Durante la actividad, la tecnología es incorporada en el momento de la formación del modelo matemático a partir de los datos reales y en la síntesis y regreso a la situación real. Esta elección favorece el tránsito entre las etapas de la modelación, como lo señalan Rodríguez y Quiroz (2015), y además ofrece alternativas de solución y el desarrollo del pensamiento matemático (Villarreal, 2012).

Materiales necesarios y visión general de la secuencia

Los materiales que se proponen para el desarrollo de la situación de modelación matemática son:

- Calculadora ClassPad Fx400 o similar (podría ser usada también algún programa de hoja de cálculo; sin embargo, las secuencias de comandos podrían variar).
- Fichas pintadas de un lado verde y del otro amarillo.
- Hoja de trabajo del alumno.

Los momentos y las tareas que componen a la situación "La genética de acuerdo con las leyes de Mendel" se detallan en la figura 1. Posteriormente se describe con mayor detalle cada tarea relativa a los tres momentos de la secuencia didáctica.

Fig. 1. Momentos y tareas de la secuencia didáctica.

"La genética de acuerdo con las leyes de Mendel"

Momento 1. Introducción al contexto real
- T1.1. Presentación del contexto biológico en el que se inscribe la situación.
- T1.2. Realizar la pregunta detonadora de la situación.

Momento 2. Se matematiza la situación y se realizan simulaciones: generación de una conjetura.
- T2.1. Realizar simulaciones lanzando una moneda para entender el comportamiento de los eventos involucrados en la situación en equipos de dos personas.
- T2.2. Reflexionar sobre los resultados obtenidos en los diferentes equipos y sobre su validez.
- T2.2. Simular la situación aleatoria con apoyo de la tecnología.
- T3.3. Reflexionar sobre las simulaciones y las gráficas obtenidas.
- T3.4. Comprobar conjeturas con otros equipos de trabajo.

Momento 3. Síntesis y regreso al contexto real: se comprueba la conjetura.
- T3.1. Determinar las proporciones en las cuales se comporta la población de análisis.
- T3.2. Proponer a partir de los resultados una explicación intuitiva de la segunda ley de Mendel.

Análisis de los momentos y tareas que componen la secuencia

Momento 1: introducción al contexto real

T1.1. Realizar la lectura del contexto biológico en el que se inscribe la situación

El contexto real que se le propone al estudiante tiene que ver con la aparición de la genética y los trabajos de Gregory Mendel, que permitieron el desarrollo de la teoría genética, siendo precursor de dicha parte de la biología (Darden, 1991). En esta tarea se explica de manera general la historia de Gregory Mendel y su trabajo. Además se inicia el involucramiento de conceptos biológicos como: genes, alelos, gen dominante, gen recesivo, genotipo, fenotipo, cruza híbrida, primera ley de Mendel. Esta presentación puede realizarse por medio de una lectura o bien por medio de un video. En esta tarea es posible el involucramiento del profesor de ciencias o biología, dependiendo del nivel educativo. En la figura 2 se muestra una visión general de la presentación del contexto.

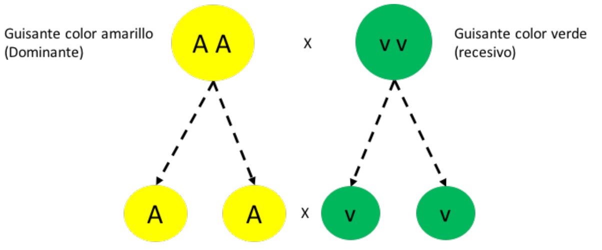
Actualmente, la genética es un campo de estudio con vertiginosos avances en la clonación con éxito de seres vivos. Pero estos avances no pudieron lograrse sin las investigaciones realizadas por el monje Gregory J. Mendel (1822-1884), de origen austriaco, quien cruzó guisantes de color amarillo con una especie escasa de guisante verde. El resultado de este experimento dio origen a una generación híbrida de guisante amarilla al 100%, lo cual quiere decir que todos los elementos que resultaron de esta primera cruza fueron híbridos, pero amarillos. Lo anterior condujo a Mendel a establecer más experimentos y a la postre conjeturar relaciones hasta lo que hoy conocemos como las leyes de Mendel.

Es importante reconocer que las investigaciones de Mendel sentaron las bases para el estudio de cómo los seres vivos se “mezclan” y producen “nuevas” generaciones con atributos comunes y cómo también ciertas especies “pierden” atributos. Además, para la ciencia los trabajos de Mendel constituyeron avances importantes en aspectos metodológicos y experimentales, puesto que Mendel reconoció la necesidad de una experimentación rigurosa y sistemática, además de expresar sus resultados en forma cuantitativa mediante recursos estadísticos, lo cual fue un parteaguas en los trabajos de biología de la época.

Antes de los trabajos de Mendel se tenía en consideración una teoría que se conocía como la herencia por mezcla, la cual suponía que los caracteres de los padres y las madres se mezclaban; es decir, si consideramos el cruce entre dos flores, una roja y una blanca, la flor resultante de la cruza será rosada. A esta teoría se le llamaba pangénesis.

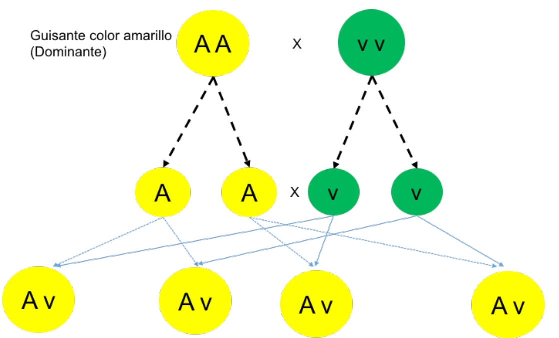
A continuación intentaremos reflexionar sobre los trabajos de Mendel intentando aproximarnos a las conjeturas que planteó. Para ello centraremos nuestra atención en el gen que determina el color de un guisante.

Los genes se presentan por pares. Por ejemplo, en el guisante amarillo, el par asociado de genes se considera (A, A), el cual será tomado como el gen dominante. Mientras que el gen del guisante verde está asociado al par (v, v). Al realizar una cruza de estas dos razas puras de guisantes, cada una aporta un gen para formar un nuevo par que determinará el color del guisante, al cual llamaremos híbrido, ya que no es "puro".



En síntesis, cuando Mendel hace mención de una cruza híbrida, se refiere a un guisante que se formó a partir de un gen aportado por un guisante amarillo dominante y un gen aportado por un guisante verde recesivo, ambos de raza pura. Lo anterior implica que cuando existe una cruza de guisantes, cada uno de ellos aportará un gen cada uno a la siguiente generación.

Ahora bien, como cada uno de los "padres" (o la raza pura) aporta un gen a la nueva generación siguiente, esta nueva generación tendrá nuevamente un par de genes, donde tendrá un gen aportado por el guisante amarillo y uno del guisante verde (pero recuerden que el guisante amarillo tiene un par de genes, al igual que el guisante verde). Lo anterior permite la aparición de una generación de guisantes híbrida amarilla al 100%, porque justo el gen A es el dominante y dará el color del guisante híbrido de la nueva generación (el fenotipo), aun cuando contenga un gen verde recesivo. Lo anterior se puede apreciar en la siguiente imagen:



Lo anterior también podría representarse por medio de un cuadro de Punnet:

Guisantes de Raza Pura	v	v
A	(A,v)	(A,v)
A	(A,v)	(A,v)

Fig. 2. Presentación del contexto real.

T1.2. Realizar la pregunta detonadora de la situación.

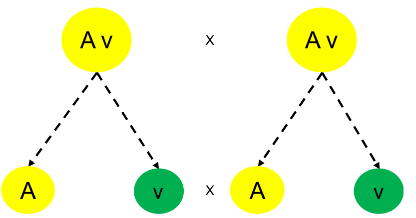
La pregunta detonadora está relacionada con la producción de una nueva generación de guisantes, pero usando la raza híbrida. El planteamiento es el siguiente:

Fig. 3. Planteamiento de la pregunta detonadora.

Ahora bien, como se puede apreciar en la tabla anterior, todos los guisantes de la primera generación tienen un par de genes, uno amarillo dominante y uno verde recesivo; es decir, sus genes son (A, v). La anterior relación dio pie a la primera ley de Mendel: principio de la uniformidad de los heterocigotos de la primera generación filial, la cual establece que si se cruzan dos razas puras (un homocigoto dominante con uno recesivo) para un determinado carácter, los descendientes de la primera generación serán todos iguales entre sí, fenotípica (lo visible) y genotípicamente (código genético), e iguales fenotípicamente a uno de los progenitores (de genotipo dominante).

Ahora bien, considera la siguiente pregunta y reflexiona junto con tus compañeros una posible conjetura: ¿qué sucedería si ahora producimos una nueva generación de guisantes, pero usando a los miembros de la raza híbrida?

Para el caso que planteamos de la cruza de dos guisantes híbridos, se tiene que considerar en un inicio un par de guisantes heterocigotos, cuyos genes son de la siguiente manera: (A, v) y (A, v).



Cuando Mendel realizaba los experimentos de este tipo pudo observar que obtenía muchos guisantes con características de piel amarilla y mucho menos con características de piel verde.

Momento 2. Se matematiza la situación y se realizan simulaciones: generación de una conjetura

T2.1. Matematizar la situación

En esta tarea se debe dar inicio a cuestionamientos sobre la naturaleza del fenómeno a enfrentar, específicamente que el color del guisante resultado de la cruza de un par de guisantes híbridos son eventos de un experimento aleatorio.

Algunas preguntas que pudieran motivar la reflexión podrían ser como las siguientes:

- ¿Qué posibles características podrían tener los guisantes de la segunda generación proveniente de este par de guisantes híbridos de primera generación?

- ¿De qué manera podría averiguar Mendel qué tantos de los posibles resultados de guisantes de segunda generación serán amarillos y qué tantos serán verdes?

Se espera de esta manera promover la reflexión sobre la importancia de la experimentación, en este caso combinar guisantes de la primera generación para ver los resultados y reflexionar sobre ellos. Las siguientes preguntas intentan favorecer una experimentación en el salón de clases y analizar los posibles resultados.

- ¿Se podría realizar la experimentación en el aula?
- ¿Qué posibles resultados se podrían tener?

T2.2. Realizar simulaciones del experimento aleatorio usando el lanzamiento de fichas coloreadas para entender el comportamiento de los eventos involucrados en la situación

Durante la implementación de la situación es importante simular el experimento de la cruza de dos guisantes híbridos con ayuda de lanzamientos de fichas (un lado verde y uno amarillo), los cuales significarán la aparición de los genes de dos guisantes híbridos y la cruza obtenida. Para ello se pide un trabajo en parejas para realizar lanzamientos de las fichas que simulen los dos genes (verde o amarillo) de los guisantes:

- Amarillo-amarillo. Da como resultado un guisante amarillo.
- Amarillo-verde. Da como resultado un guisante amarillo.
- Verde-amarillo. Da como resultado un guisante amarillo.
- Verde-verde. Da como resultado un guisante verde.

Es importante realizar al menos diez lanzamientos por pareja. Se sugiere registrar los resultados en una tabla como la que se presenta en la figura 4.

Fig. 4. Tabla para registrar los resultados del lanzamiento de las fichas de colores.

Resultado de las fichas	Número de veces que aparece
Amarillo-amarillo	
Amarillo-verde	
Verde-amarillo	
Verde-verde	

Una vez que los equipos hayan completado su tabla, se puede cuestionar sobre el comportamiento de los guisantes obtenidos de la cruza. Por ejemplo, se puede pedir que en equipos realicen las actividades sugeridas y respondan las preguntas:

- ¿Coinciden tus resultados con los obtenidos en las tablas de tus compañeros?, ¿por qué?
- ¿Qué comportamiento observas en el número de guisantes verdes obtenidos de la cruza?
- ¿Y con respecto a los guisantes de color amarillo obtenidos de la cruza?
- Elabora una tabla realizando 50 simulaciones.
- ¿Qué sucedería si realizaras 250 simulaciones usando las fichas?

Las preguntas anteriores promueven reflexiones sobre la importancia de aumentar el número de experimentos dentro de la simulación de los casos y que la búsqueda de patrones en los comportamientos de los posibles valores que se obtienen de la cruza genera una comprensión de la forma en la cual se distribuye la población de la nueva generación. Pero a su vez plantea la necesidad de contar con una manera óptima de realizar simulaciones. Ante ello el profesor resalta el papel que puede tener la tecnología en la realización de las simulaciones.

T2.3. Simular la situación aleatoria con apoyo de la tecnología

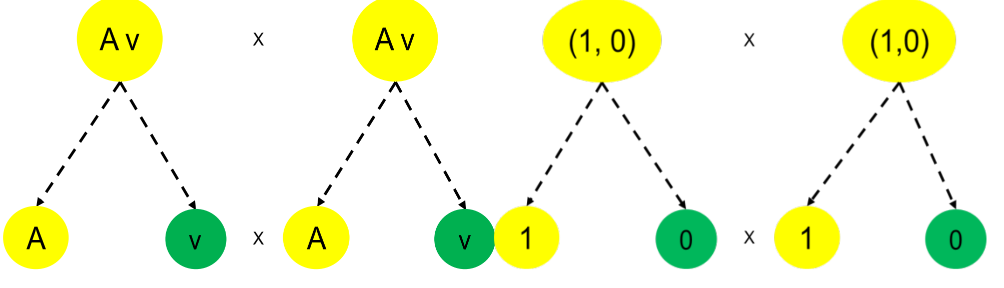
Para esta tarea se espera contar con la tecnología propuesta; sin embargo, se pueden usar en su lugar hojas de cálculo. Se muestra a continuación una secuencia de pasos utilizando una calculadora FX-CP400, la cual permite simular hasta 500 experimentos.

Se sugiere el uso de la función "número aleatorio" en la calculadora, en la cual el dispositivo aleatoriamente elije un número de entre los que se seleccionen. Ahora bien, la tecnología brinda un obstáculo a los alumnos, ya que esta demanda la representación mediante números y no colores. Ante ello se espera que los alumnos reflexionen sobre el procedimiento para hacer este cambio:

- ¿Qué números podrían utilizarse para sustituir los colores?
- ¿De qué manera podrán combinarse estos números?
- ¿Cuántas posibles respuestas debe generar esta combinación?

Esta reflexión dirigida por el docente puede llevar a proponer que el color amarillo (gen dominante) y al color verde (gen recesivo) se les puede representar como un 1 y un 0, respectivamente.

Fig. 5. Genes dominantes y recesivos representados mediante números: se matematiza la relación.



Si al llevar a cabo las cruzas se realizan las sumas de estos genes, es posible obtener tres resultados diferentes: 0, 1 y 2. Estos resultados significan lo observado en la tabla de la figura 6.

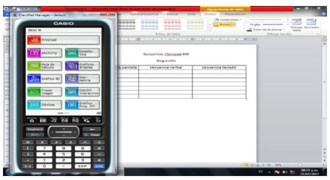
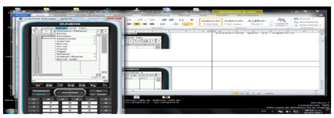
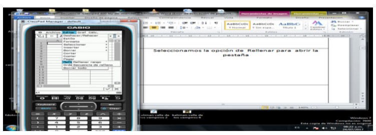
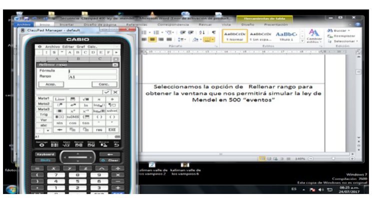
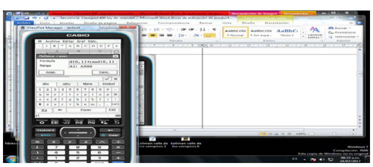
Genes	Representación con números	Resultado de la suma	Interpretación
Amarillo-amarillo	1, 1	2	Guisante amarillo puro
Amarillo-verde	1, 0	1	Guisante amarillo híbrido
Verde-amarillo	0, 1	1	Guisante amarillo híbrido
Verde-verde	0, 0	0	Guisante verde puro

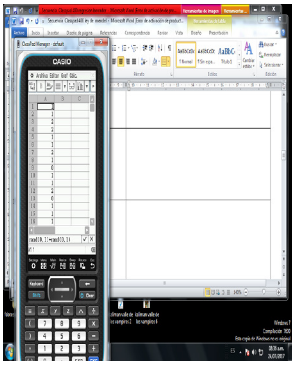
Fig. 6. Resultados posibles de la cruza de guisantes de la segunda generación.

En la calculadora se usará una hoja de cálculo donde se registrarán los resultados de los experimentos aleatorios, considerando la suma de cualquiera de estos dos valores, ya que esta representa la cruza. Cada celda de la hoja de cálculo significará entonces cada uno de los descendientes de la cruza de dos guisantes híbridos.

En la tabla 1 mostramos la primera parte de la secuencia de pasos usando la tecnología, que consiste en el llenado de la tabla usando los números aleatorios:

Tabla 1. Secuencia del uso de la calculadora para la generación de números aleatorios

Secuencia gráfica pantalla	Secuencia
	Pulsar el ícono de hoja de cálculo dentro del menú de inicio.
	Pulsar el ícono de editar para poder completar la secuencia que se requiere.
	Seleccionar la opción de “Rellenar” y abrir la pestaña.
	Seleccionar la opción “Rellenar rango” para obtener la ventana que nos permitirá simular 500 eventos.
	En la ventana “Rellenar rango” se completará con la siguiente fórmula que considera la suma de dos números aleatorios enteros entre el 0 y el 1: rand(0,1) + rand(0,1). En el apartado “Rango” se pondrá el número de eventos que se requieren; en nuestro caso consideraremos el máximo. Para ello escribimos lo siguiente: A1:A500, que hace referencia a la columna donde se encontrarán nuestros datos generados por la calculadora.
	Después de teclear la secuencia que nos permite realizar la simulaciones, pulsar “Aceptar” para generar las 500 simulaciones.



En la imagen contigua se puede observar un listado donde aparecen ceros, unos y dos. El cero representa un guisante de la nueva generación con un par de genes recesivos (v, v), el uno representa un guisante híbrido con un gen dominante (A, v) o (v, A), y el número dos representa un guisante con un par de genes dominantes (A, A).

Momento 3. Síntesis y regreso al contexto real: se comprueba la conjetura

T3.4. Reflexionar sobre las simulaciones y las gráficas obtenidas

En esta tarea se busca cuestionar la forma en la cual se distribuía la población que Mendel obtenía. Al inicio de la situación se mencionó que el austriaco obtenía muchos guisantes con características de piel amarilla y mucho menos con características de piel verde. Ahora, a través de los resultados generados por la calculadora se puede corroborar este hecho y explicar el porqué, pero además usando para ello representaciones gráficas como histogramas de frecuencias (ver tabla 2).

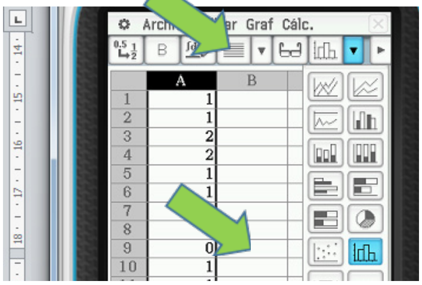
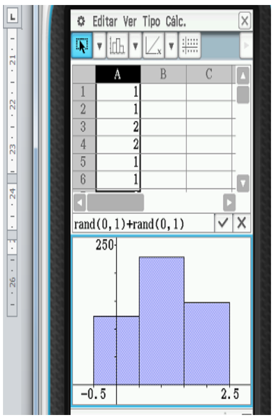
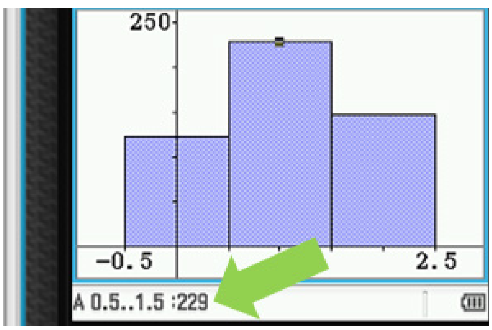
No obstante a la actividad de simulación que se realizó es importante discutir la necesidad de realizar otras más, puesto que sin importar el número de veces que se simule, la población se distribuirá de la misma manera, con una tendencia clara a establecer las relaciones de 3 a 4 de guisantes amarillos y 1 a 4 de guisantes verdes. Para ello se puede solicitar a la calculadora que “recalcule” la simulación; esto es, que realice nuevamente los 500 experimentos aleatorios. Esto generará nuevos eventos; sin embargo, la distribución de la población no variará, en proporción, ya que se continuará conservando una tendencia hacia las proporciones que se mencionaron anteriormente.

De esta manera la tecnología provee un apoyo visual respecto a la distribución de la población de guisantes de esta generación derivada de la cruza de dos guisantes híbridos de primera generación. La reflexión se encamina a la consideración de la distribución de la cruza de dos guisantes híbridos considerando un cuadro Punnet como el mostrado en la figura 7.

Guisantes Híbridos	A	v
A	(A, A)	(A, v)
v	(v, A)	(v, v)

Fig. 7. Cuadro de Punnet para organizar la cruza de los guisantes híbridos de la primera generación.

Tabla 2. Secuencia del uso de la calculadora para la generación de una gráfica

Secuencia gráfica pantalla	Secuencia
	Para observar en una gráfica de barras cómo se distribuyen los resultados de la simulación, primero seleccionar la columna A; posteriormente pulsar el ícono de tipos de gráficos; después seleccionar el gráfico de barras.
	La primera columna de la gráfica se refiere a la cantidad de "ceros" aleatorios que aparecen en la población; la siguiente columna la cantidad de "unos" y la última columna al número de "dos" que aparecieron.
	En la parte inferior de la gráfica se visualizan cuántos "ceros" aparecen en la distribución de la población. Lo anterior se puede hacer con cada una de las columnas, de manera que se tienen cuántos ceros, unos y dos hay en cada columna respectivamente.

En el cuadro de la misma figura 7 se puede ver que en los guisantes de la segunda generación es más probable que sean amarillos y menos el obtener un guisante verde. Lo anterior se debe a que tres de cuatro eventos resultaron en un guisante con un fenotipo amarillo, mientras que uno de cuatro resultó ser verde. Estas proporciones son las que derivaron en la segunda ley de segregación de Mendel, la cual estableció luego de una cantidad importante de experimentos (Valega, s.f.).

T3.5. Comprobar conjeturas con otros equipos de trabajo

Una vez que se haya mostrado la realización de diversas simulaciones, se debe hacer hincapié en la necesidad de la búsqueda de patrones. Para ello proponemos las actividades de la figura 8, que pueden motivar un análisis profundo de la forma en la cual se distribuyen los individuos de la nueva generación.

Fig. 8. Actividad de reflexión sobre la segunda ley de Mendel.

- ¿Qué proporción de guisantes amarillos puros hay después de la cruza?
- ¿Qué proporción de los guisantes son verdes puros?
- ¿Qué proporción de los guisantes son híbridos?, ¿de qué color serían estos híbridos?

Posterior a la serie de experimentos, y con ayuda de estadística descriptiva, Mendel pudo ser capaz de proponer un comportamiento de los miembros de la segunda generación: la proporción era de 3/4 de color amarillo y 1/4 de color verde.

Guisantes Híbridos	A	v
A		
v		

A continuación, con tus propias palabras describe una ley del comportamiento de la nueva generación a partir de la cruza de individuos de raza híbrida, según lo que acabas de observar y experimentar.

Conclusiones

El presente estudio tuvo como intensión poner en la mesa de discusión la necesidad de implementar, dentro de las instituciones formadoras de docentes, metodologías donde los futuros docentes tengan oportunidad de experimentar, desde el punto de vista del alumno, el trabajo con una situación basada en modelación matemática. Este trabajo de reflexión sobre la práctica busca sumarse a las propuestas para la proposición del proceso de aprendizaje de la modelación por parte de los futuros docentes. Se espera que este tipo de actividades acerquen al docente con las bondades, características y dificultades propias del uso de la modelación matemática y con ello se apoye una mayor implementación de esta estrategia en su trabajo con sus futuros alumnos.

El trabajo con situaciones de modelación matemática en el aula de formación de docentes demanda del investigador o formador la previa preparación de dichas situaciones. Estas deben estar ligadas a cada una de las etapas del proceso de modelación, donde se consideren elementos teóricos importantes. Uno de ellos es la apropiada selección de un contexto donde los docentes encuentren un interés. Específicamente, los fenómenos que permiten ligar a las matemáticas con otra u otras asignaturas permiten no solo redefinir el planteamiento de lecciones de matemáticas, sino a la vez abordar el currículo de manera transversal, tal y como lo promueve la SEP (2011).

En segundo lugar, es necesario tomar en cuenta la proposición de actividades donde el docente pueda vivir, desde el punto de vista del alumno, las tareas que a este se le demandarán en el salón de clases. Desde la discusión de la situación, la generación de dudas y la promoción de diálogo entre los mismos docentes se aportará una idea más clara al docente respecto al proceso de modelación.

En tercer lugar se recomienda atender la organización del trabajo que de antemano ha mostrado buenas consecuencias en las sesiones de modelación que se han investigado. Específicamente recomendamos el uso de la metodología Acodesa, donde se permita al docente trasladarse desde un trabajo individual hacia un trabajo en equipo para posteriormente exista una discusión en gran grupo. Al finalizar, el regreso al trabajo individual permitirá conocer el aprendizaje de los docentes después de esta experiencia.

Además, en las secuencias se sugiere promover la incorporación de una tecnología que permita al docente conocer en qué momentos es favorable el uso de algún recurso de acuerdo con lo señalado por investigaciones. En la propuesta realizada se retoman elementos encontrados por Rodríguez y Quiroz (2015), donde se especifican tres momentos en que la tecnología permite el paso entre las diversas etapas de la modelación matemática. Por último, en las implementaciones se busca generar un ambiente donde el docente pueda experimentar no solamente las bondades del proceso, sino también las posibles dificultades a las que se puede enfrentar cuando sea él mismo el que aplique esta estrategia en su aula.

Los resultados presentados de la fase 1, así como el futuro trabajo en la fase 2, buscan aproximarse a realizar una investigación-acción donde se promueva la vinculación entre la práctica diaria del docente con el trabajo del investigador, permitiendo al primero una mejora de su desempeño y al segundo un mayor entendimiento del quehacer diario del docente en el aula de clases de matemáticas.

Agradecimientos

Este manuscrito presenta algunos resultados en el marco del proyecto Prodep “Laboratorio de innovación y didáctica de las matemáticas con tecnología”, folio UA-COAH-PTC-405, carta de liberación DSA/103.5/16/10616.

Referencias

Alsina, C. (2007). Less chalk, less words, less symbols... more objects, more context, more actions. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and*

Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study, *10*(21), 35-44. http://doi.org/10.1007/97803872982212

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68.

Castañeda, E. (2010). *La modelación como estrategia didáctica para la resolución de problemas en educación secundaria haciendo uso de un recurso educativo abierto* (tesis maestría no publicada). Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Nuevo León, México.

Creswell, J. (2007). *Qualitative Inquiry & Research Design: Choosing Among Five Approaches*. California, Estados Unidos: Sage.

da Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J.P. da Ponte y J.F. Mateos (eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Lisboa, Portugal: Universidad de Lisboa.

da Ponte, J.P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98), Barcelona, España: Graó.

Darden, L. (1991). *Theory Change in Science. Strategies from Mendelian Genetics*. Nueva York, Estados Unidos: Oxford University Press.

Doerr, H.M. (2007). What Knowledge do Teachers Need for Teaching Mathematics through Applications and Modelling? En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(24), 69-78. http://doi.org/10.1007/97803872982214

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J.M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática*, *16*(1), 89-111. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516104

Ferreira, A. y Miorim, M. (2011). Collaborative Work and the Professional Development of Mathematics Teachers: Analysis of a Brazilian Experience. En N. Bednarz, D. Fiorentini y R. Huang (eds.), *International Approaches to Professional Development for Mathematics Teachers* (pp. 137-149). Ottawa, Canadá: University of Ottawa Press. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/j.ctt1ch77v3.13

Flores, E. (2006). El investigador educativo como agente de cambio. *1er Simposio Nacional de Investigación sobre la Innovación Educativa*. Monterrey, México: Investigación Acción / Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

García, R. (2005). Innovación, cultura y poder en las instituciones educativas. Algunas evidencias encontradas en el "mundo de la vida" de las organizaciones escolares. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *3*(1), 578-585. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/551/55130157.pdf

Gliboff, S. (2015). The Mendelian and Non-Mendelian origins of Genetics. *Filosofia e História da Biologia*, *10*(1), 99-123.

Henn, H.W. (2007). Modelling pedagogy-overview. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(35), 321-324. http://doi.org/10.1007/978038729822133

Hitt, F. (2013). Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *18*(1), 9-27. Recuperado de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives/volume_18/adsc18-2013_001.pdf

Lakoma, E. (2007). Learning mathematical modelling-from the perspective of probability and statistics education. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(36), 387-394. http://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_42

Latapí, P. (2003). *¿Cómo aprenden los maestros?* (serie Cuadernos de discusión n. 6). México: Secretaria de Educación Pública. Recuperado de www.oei.es/historico/docentes/articulos/como_aprenden_maestros_latapi.pdf

Lesh, R. y Yoon, C. (2007). What is the distinctive in (our views about) models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching? En W. Blum, P.

Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(31), 161-170. http://doi.org/10.1007/978038729822115

Llinares, S. (2012). Del análisis de la práctica al diseño de tareas matemáticas para la formación de maestros. En N. Planas (coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 99-115). Barcelona, España: Graó.

Lorenzano, P. (2005). Ejemplares, modelos y principios de la genética clásica. *Scientiæ Studia*, *3*(2), 185-203.

Medina, D. (2011). *La modelación matemática como medio para la enseñanza de la relación funcional en el aula* (tesis de maestría no publicada). Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Nuevo León, México.

Muller, E. y Burkhardt, H. (2007). Applications and modelling for mathematics-overview. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(34), 267-274. http://doi.org/10.1007/978038729822128

Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(1), 3-32. http://doi.org/10.1007/9780387298221

Nyaumwe, L. (2004). The impact of full time student teaching on preservice teachers' conceptions of mathematics teaching and learning. *Mathematics Teacher Education and Development*, *6*(1), 19-30.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2010). *PISA 2009 Assessment Framework. Key competencies in reading, mathematics and science*. *Assessment*. París, Francia: OCDE Publishing.

Pead, D., Ralph, B. y Muller, E. (2007). Uses of technologies in learning mathematics through modelling. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(34), 309-318. http://doi.org/10.1007/978038729822132

Pollak, H. (1969). How can we teach applications of Mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, *2*(2), 393-404. http://doi.org/10.1007/BF00303471

Pollak, H. (2007). Mathematical modelling. A conversation with Henry Pollak. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(28), 109-120. http://doi.org/10.1007/97803872982219

Quiroz, S., Hitt, F. y Rodríguez, R. (2015). Évolution des conceptions du processus de modélisation mathématique de futurs enseignants du primaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 20*(1), 149-179. Recuperado de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives/

Rodríguez, M. y Soto, J. (2011). Actividades didácticas dirigidas a profesores de matemáticas de secundaria, diseñadas con la metodología Acodesa. En F. Hitt y C. Cortés (eds.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 126-132). Quebec, Canadá: Loze-Dion Éditeur.

Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2015). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), 99-124. http://doi.org/10.12802/relime.13.1914

Ruiz-Higueras, L. y García, F. (2011). Análisis de las praxeologías didácticas: implicaciones en la formación de maestros. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD, CRM Documents 10* (pp. 431-464). Bellaterra, Barcelona, España: Centre de Recerca Matemática.

Santos, L.M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial iberoamerica.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Plan de estudios 2011. Eduación básica*. México: Secretaría de Educación Pública.

Trigueros, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo: un estudio desde una perspectiva de modelación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *11*(31), 1207-1240. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/140/14003106.pdf

Valega, O. (s.f.). *Las leyes de Mendel*. Recuperado de http://cvonline.uaeh.edu.mx/Cursos/Bach_Virt/CE101/Materiales_Unidad_4/Act.4.3_Leyes_de_Mendel.pdf

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia*, *3*(5), 73-94. Recuperado de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/vesc/article/view/3014/2869

Wilson, S. y Cooney, T. (2002). Mathematics teacher change and developments. En G.C. Leder, Pehkonen, Erkki, Törner y Günter (eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 127-147). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers. http://doi.org/10.1007/03064795838