

Diseño y experimentación de una secuencia de modelización para revelar ideas de funciones

Design and experimentation of a modeling sequence to reveal function ideas

Alejandra Soria Pérez • Angelina Alvarado Monroy • Yaziel Pacheco Juárez

RESUMEN

Se presenta un estudio basado en el diseño y centrado en la intervención de una secuencia de modelización para revelar ideas y representaciones de funciones que surgen de los alumnos en una situación de desarrollo de talento para el canto en un conjunto de personas durante un periodo de tiempo. La experimentación se llevó a cabo con 37 alumnos (de 18 años de edad) de un curso propedéutico previo al ingreso a una licenciatura en Matemáticas, siguiendo la metodología de investigación basada en el diseño, cumpliendo un ciclo con análisis prospectivo, experimentación en el aula y evaluación para el rediseño. Se identificaron categorías emergentes a partir de un análisis inductivo para clasificar las representaciones de los modelos de los estudiantes: lineales, lineales a trozos, suaves, discretas y alternativas. Los resultados muestran que los estudiantes utilizaron su conocimiento previo y el que emergió durante la interacción en el equipo para representar las historias de los personajes y representar el desarrollo de talento a través del tiempo. Adicionalmente, fue notorio que para destacar momentos cruciales de la historia de los personajes, los alumnos exploraron el comportamiento en momentos cercanos a estos. Se discute sobre las ideas de funciones que los estudiantes revelaron al resolver las situaciones propuestas, y las posibles mejoras del diseño que favorezcan, en pruebas posteriores, el aprendizaje.

Palabras clave: Actividades de modelización, experimento de enseñanza, funciones.

ABSTRACT

The design and experimentation of a modeling sequence are presented to reveal ideas and relationships that arise from students when representing the development of singing talent in a group of people over a period of time. The experimentation was carried out with 37 students (18 years old) in a leveling course previous to entry into a degree in Mathematics, following the design-based research methodology, completing a prospective analysis, classroom experimentation, and redesign assessment cycle. Emerging categories were identified from an inductive analysis to classify the students' representation models: linear, piecewise linear, smooth, discrete, and alternative. The results show that the students used both their prior knowledge and the insights gained during team interactions to represent the characters' stories and illustrate the development of talent over a period of time. Additionally, it was notorious that to depict crucial moments, the students explored the characters' behavior around these. The ideas about functions that the students revealed while solving the proposed situations, as well as possible design improvements that could support learning in subsequent studies, are discussed.

Keywords: Modeling activities, teaching experiments, functions.

INTRODUCCIÓN

Un desafío en la enseñanza de las matemáticas es cómo estructurar y diseñar ambientes de aprendizaje para que los estudiantes desarrollen por sí mismos (y acompañados por su maestro) ideas matemáticas formales y abstractas. El uso de representaciones gráficas ayuda a que puedan significar situaciones de la vida real que involucran variables relacionadas, y puedan aproximarse al concepto de *función* de manera libre a partir de sus conocimientos y experiencias previas, así como de la interacción con el contexto de la situación para explicar, interpretar, matematizar y comunicar sus modelos. En la modelización es usual iniciar una exploración libre que en un inicio no demanda uso de herramientas y conceptos matemáticos específicos, aunque en el proceso germinan ideas que permiten identificar relaciones, por ejemplo, cambios en un comportamiento a través del tiempo. Así, es posible encauzar ideas alternativas para que sean refinadas empujando el desarrollo conceptual al revisar si es posible que la situación sea matematizable o bien cuestionar y contrastar con otras situaciones que sí lo sean y puedan llegar a la formalización conceptual con la guía del docente.

En el nivel superior es necesario plantearse que, más allá de formar matemáticos profesionales, se trabaja con personas para que desarrollen y refinen conocimientos y herramientas que les permitan enfrentar las situaciones de su vida, por lo tanto se vuelve imprescindible buscar estrategias que permitan, sin abusar de la formalidad matemática, que el estudiante progrese en sus formas de representar situaciones que dirijan el desarrollo conceptual a través de establecer relaciones, manipularlas y aplicarlas con significado. Inmersas en este desafío, es deseable preguntarse: ¿cómo se aproximan los estudiantes a un problema de modelización en el que pueden utilizar conocimientos previos y extraer significado de la situación?, ¿qué ideas, conceptos y representaciones emergen en el trabajo de los estudiantes durante esta experiencia?

Alejandra Soria Pérez. Profesora-investigadora de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango, México. Es Doctora en Ciencias por la Universidad Nacional Autónoma de México, profesora en la Carrera de Licenciatura en Matemáticas y miembro del Núcleo Académico de la Maestría en Matemática Educativa de la FCE UJED. Correo electrónico: alejandra.soria@ujed.mx. ID: <https://orcid.org/0000-0002-0742-7715>.

Angelina Alvarado Monroy. Profesora-Investigadora de la Universidad Juárez del Estado de Durango, México. Es Doctora en Educación Matemática por la Universidad de Salamanca, España. Forma parte del Comité Directivo de la Red de Enseñanza Creativa de las Matemáticas y Coordinadora de la Comisión de Educación en la Sociedad Matemática Mexicana. Tiene perfil PRODEP, reconocimiento del Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores, además de investigadora emérita en el Sistema Estatal de Investigadores en Durango. Los últimos proyectos CONAHCYT como asesora responsable e investigadora son “Posibilidades de la modelización matemática como estrategia para la equidad en matemáticas” e “Incidencia e investigación en enseñanza de las matemáticas 2020-2022”. Correo electrónico: aalvarado@ujed.mx. ID: <https://orcid.org/0000-0001-6063-1822>.

Yaziel Pacheco Juárez. Profesora-Investigadora de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango, México. Es Doctora y Maestra en Ciencias (Matemáticas) por la Universidad Nacional Autónoma de México. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores del 2019 al 2021. Recientemente se ha incorporado a la docencia y la investigación en matemática educativa. Correo electrónico: yaziel.pacheco@ujed.mx. ID: <https://orcid.org/0000-0002-1611-3937>.

Una premisa para un experimento de enseñanza con las características descritas sugiere que las matemáticas que somos capaces de conocer son aquellas a las que nuestros cuerpos y mentes nos permiten acceder a través de mecanismos cognitivos cotidianos, tales como las metáforas y mezclas conceptuales, así como el movimiento ficticio y los esquemas dinámicos que extienden la estructura de la experiencia corporal (Lakoff y Núñez, 2000; Núñez, 2020). Además, el uso de analogías también puede ser un medio para el entendimiento de conceptos matemáticos (Priestley, 1979). Otra premisa para este experimento, de acuerdo con Harel (2013), es que para provocar una *necesidad intelectual* de un concepto matemático en los estudiantes es deseable que participen en actividades matemáticas que sean reales para ellos, para las cuales vean un propósito. Inicialmente esto puede significar problemas que surgen en el mundo “real” (extra-matemático) y para los cuales parten de sus experiencias previas (tanto escolares como del contexto), a medida que los estudiantes progresan, las matemáticas se vuelven parte de su mundo y los problemas matemáticos “abstractos” se vuelven igualmente reales. Siguiendo las ideas de Piaget y Brouseau, Harel (2013) expresa que para cada pieza de conocimiento existe una situación fundamental apropiada para darle significado a un concepto matemático. Por otra parte, el aprendizaje de las matemáticas, para Lesh y Doerr (2003), es un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales o modelos que surgen cuando los estudiantes analizan situaciones de resolución de problemas que tienen más de una respuesta y cuya solución no es un número o una palabra, sino situaciones que ameritan describir, argumentar y explicar. Así, el progreso en el conocimiento se da a partir de las interacciones entre pares desde experiencias personales como puntos de partida para la construcción de dicho conocimiento.

Desde lo anterior, se propuso en el curso propedéutico una situación en la cual se les presentó a los estudiantes (de edad promedio 18 años) narrativas (escritas y en video) del desempeño de un grupo de actores que desarrollan su talento como cantantes en un tiempo determinado. Con esta información ellos propusieron un modelo sobre el comportamiento de los actores en el desarrollo del talento como cantantes con respecto al tiempo establecido.

Este contexto logró interesar a los estudiantes al ofrecer una amplia gama de posibilidades de interpretar y representar la situación utilizando sus conocimientos informales y experiencias previas escolares sobre gráficas en relación con una serie televisiva y la constante exposición a las gráficas en los medios de comunicación. Por otra parte, este experimento puede animar a los docentes a implementar la secuencia sugerida para introducir la modelización en el aula con la intención de provocar el surgimiento y refinamiento de las ideas, relaciones y representaciones, principalmente de funciones, en un ambiente participativo que promueve las interacciones entre pares al mismo tiempo que se desarrollan competencias para la modelización.

Objetivo

El objetivo es conducir un experimento de enseñanza con un grupo de estudiantes (18 años de edad) para identificar las ideas y relaciones que surgen al representar una situación a partir de la extracción de significado del contexto presentado –desarrollo de talento para el canto de un grupo de personas durante un periodo de tiempo–, con la intención de conocer sus concepciones y representaciones y proponer formas que permitan extenderlas.

FUNDAMENTACIÓN

La modelización matemática tiene una especial importancia pedagógica y didáctica, es una forma de enseñanza congruente con las necesidades actuales de formación de los estudiantes que demanda habilidades para matematizar situaciones y problemáticas relevantes de la realidad cambiante y compleja. En la última década se nota un cuerpo creciente de investigación enfocado en utilizar la modelización como medio para atender uno de los mayores desafíos en la enseñanza-aprendizaje de la matemática desde la educación básica a la superior: la desconexión entre la matemática escolar y los contextos reales (Carreira y Blum 2021a, 2021b; Hirsch y McDuffie, 2016; Leung et al., 2021; Rosa et al., 2022; Sun et al., 2021).

En armonía con lo anterior, en este estudio la *perspectiva de modelos y modelización* (PMM) (Lesh et al., 2000; Lesh y Doerr, 2003) se utiliza para el diseño de la actividad con la intención de motivar el aprendizaje con experiencias en las cuales los estudiantes puedan crear y refinar sus propias ideas, así como para analizar las tareas y sus producciones. En esta perspectiva, un modelo es un sistema conceptual con el que las personas significan sus experiencias y que consta de *elementos*; *relaciones* entre elementos; *operaciones* que describen cómo interactúan los elementos; y, *patrones o reglas* que se aplican a las relaciones y operaciones. No todo sistema conceptual es un modelo; el modelo se utiliza para referirse al sistema conceptual con el que las personas dan sentido a sus experiencias (Lesh y Doerr, 2003). Estos modelos sirven para describir otro sistema, pensar en él, darle significado, explicarlo, o bien hacer predicciones sobre él (Lesh et al., 2000). Los modelos pueden expresarse externamente utilizando combinaciones de medios de representación: acciones físicas, lenguaje hablado, lenguaje escrito o símbolos (metáforas y ecuaciones), imágenes, gráficos, tablas y diagramas.

Las tareas en la PMM permiten un amplio rango de aproximaciones a la solución. Estas son conocidas como *actividades provocadoras de modelos* (*Model Eliciting Activities*, MEA) y sustentan su diseño en seis principios –que serán utilizados en este estudio para el diseño y validación de las tareas propuestas–: realidad, construcción del modelo, autoevaluación, documentación, generalización y prototipo simple.

Para Lesh et al. (2000), las actividades provocadoras de modelos presentan un problema de la vida real o situación auténtica (*principio de la realidad*) a resolverse de

forma colaborativa en equipos de estudiantes. Están diseñadas para centrarse en una comprensión más rica, profunda y de orden superior de los conceptos matemáticos, no son prescriptivas de dichos conceptos. Por ejemplo, en la situación que aquí se presenta (figuras 1, 2 y 3), el concepto de función no se enuncia en el problema, aunque aparece casi inevitablemente en la diversidad de modelos que proponen los alumnos (*principio de construcción de modelos*). Para asegurar que el modelo responde adecuadamente se establecen criterios claros que debe cumplir (*autoevaluación*) y que permiten que el estudiante valore qué tan cerca está de una respuesta. Las actividades ameritan respuestas que van más allá de una respuesta única, así la situación demanda que los estudiantes justifiquen, acepten, discutan y expresen ellos mismos sus ideas a los demás estudiantes (*documentación*). Además es importante que el modelo obtenido pueda llegar a la *generalización* y utilizarse para interpretar situaciones similares (*prototipo simple*).

Para Lesh y Doerr (2003), los modelos generados residen en la mente de los resolutores y durante el proceso de modelización requieren desarrollarse y comunicarse mediante una amplia variedad de representaciones: verbales, visuales, gráficas, simbólicas, entre otras.

Las actividades provocadoras de modelos ayudan a revelar las debilidades y fortalezas de los estudiantes y, por ello, son poderosas para planear la instrucción futura. No obstante, Doerr (2016) nos recuerda que para lograr el desarrollo conceptual se requiere que las actividades provocadoras de modelos se complementen con otros tipos de actividades previas, para familiarizar a los estudiantes con el contexto a tratar, y posteriores, para explorar y extender sus ideas. Así, en este estudio se propone una secuencia de desarrollo de modelos, como lo sugiere Doerr, que motiva representaciones de diferentes funciones para modelizar situaciones de cambio en el tiempo.

El concepto de *función* es de los más utilizados para modelizar situaciones (Carmacho et al., 2017; Montero et al., 2020; Suárez y Cordero, 2008; Toro et al., 2018; Vargas et al., 2016), este se apoya en múltiples representaciones: verbales, patrones geométricos, variables independientes y dependientes, pares ordenados, diagramas, secuencias, gráficos de barras duales, gráficos en el plano cartesiano y el simbolismo funcional $f(x)$. Makonye (2014) argumenta que las representaciones múltiples que comienzan con lo informal y cotidiano y luego progresan gradualmente hacia lo formal y abstracto ayudan a los alumnos a comprender las grandes ideas de las funciones en matemáticas. La autora sugiere que la modelización matemática es una aproximación que promueve el uso de diferentes representaciones y es una plataforma que facilita un enfoque realista de la enseñanza de las funciones que puede extenderse a otros temas matemáticos.

Entre las investigaciones centradas en la modelización es notable la presencia de las gráficas como una herramienta transversal o medio de representación para externar

los modelos que residen en la mente de los estudiantes para interpretar situaciones. Dicha interpretación se realiza a partir del desarrollo de argumentos cualitativos en escenarios con profesionistas en sus prácticas (Pérez-Oxté y Cordero, 2022) para organizar la información y mostrar procedimientos y técnicas (Tuyub y Buendía, 2017) y resaltando la importancia de la utilización de datos reales (Borba et al., 2016). En este mismo sentido, Moreno y Alvarado (2021) encuentran que las representaciones gráficas, de una situación real modelizada por los estudiantes mediante funciones, están condicionadas por sus experiencias previas formales e informales, y al revisarse en lo colectivo se refinan sus interpretaciones y progresan hacia representaciones tabulares y simbólicas.¹

Por su parte, Trigueros (2023) encuentra que al tratar con un problema abierto de modelización que implica indagar el comportamiento de una innovación, los estudiantes de ingeniería se aproximaron en un inicio a partir de representaciones de gráficas de funciones y esto les permitió dar sentido a la situación, y de manera gradual empezó a aparecer la relación del cambio a través del tiempo, hasta llegar a ideas que les permitieron expresar sus modelos en términos de un lenguaje que les llevó a las ecuaciones diferenciales.

En el presente estudio las representaciones que utilizan los estudiantes para modelizar una situación de cambio en el tiempo son analizadas y se reconoce el potencial para tratar con funciones que se salen de las que usualmente son utilizadas en el contexto escolar.

La propuesta resulta novedosa, puesto que los estudiantes plantean los elementos a tomar en cuenta para representar y evaluar el talento de un grupo de personas a través del tiempo, sin forzar necesariamente a una representación funcional directa o clásica. Además se promueve la relación de elementos fundamentales del concepto de *función*, como dominio, imagen, que la función esté bien definida, así como el análisis y relación de la “cercanía” a un momento específico en el dominio y cómo esto se refleja en el contradominio, lo cual permitiría en un futuro introducir naturalmente las nociones de límite y de continuidad de una función.

METODOLOGÍA

Esta investigación es cualitativa e intervencionista, al ser un experimento de enseñanza que crea y evalúa condiciones para el aprendizaje, por ello es apropiada la metodolo-

¹ En esta investigación los estudiantes predecían con una gráfica la propagación de un virus en una población y al contrastarla con la gráfica resultante de una simulación analizaban las diferencias. En sus predicciones era decreciente, mientras que en la simulación era creciente, debido a que su interpretación era “a medida que pasa el tiempo, caen más enfermos” en lugar de “conforme el tiempo avanza se incrementa el número de enfermos”.

gía de investigación basada en el diseño, que, a decir de Bakker y van Eerde (2015), implica ciclos iterativos de concepción del diseño, observación, análisis y rediseño, acompañados de una retroalimentación sistemática desde los resultados con los estudiantes. En estos experimentos se anticipa cómo las formas particulares de enseñar funcionan y estudiarlas conduce a una mayor comprensión de las mismas. Las fases implicadas son: *preparar* el experimento centrándose en fundamentar el diseño y anticipar la respuesta de los estudiantes, *experimentar* para apoyar el aprendizaje y *realizar análisis retrospectivos* de los datos generados con los alumnos (Cobb y Gravenmeijer, 2008). Las primeras dos fases se documentan más adelante en la sección de resultados, mientras que la tercera fase, de análisis retrospectivo, se encuentra en la sección de discusión y conclusiones.

En el proceso de diseño y evaluación de las tareas se consideraron los principios de la PMM (Lesh et al., 2000) para asegurar que los estudiantes expresaran significados personales en la variedad de modelos con los cuales explicaban o representaban el comportamiento de diferentes personajes en una situación de desarrollo de talento a través del tiempo. Además debían comunicar sus modelos y valorar los de otros.

Para disponer (motivar e interesar) a los estudiantes se utilizó como contexto de la situación la serie televisiva *Glee* (Fox, 2009-2015), teniendo en consideración que motivó artículos académicos con el objetivo de analizar la serie desde la perspectiva de la representación de la diferencia o diversidad como seña o marca de identidad de los personajes adolescentes y disparador de las tramas narrativas que repasan los aspectos que mezclan la cultura popular y la impopularidad de sus personajes (González, 2011). Esta serie se convirtió en un fenómeno televisivo en virtud del gran éxito de audiencia y ante la crítica, este contexto atrajo notablemente a los estudiantes y provocó numerosas discusiones que pusieron de manifiesto tanto aspectos matemáticos como sociales y culturales que para ellos resultaban significativos.

Descripción de la secuencia propuesta a los estudiantes

Como actividad de calentamiento se presenta a los estudiantes un tráiler de la serie televisiva *Glee*, para mostrar la conformación de un grupo de canto, donde jóvenes interesados desarrollarán su talento en ese ámbito, además de la forma secuenciada, en diferentes épocas, en que sucede la historia.

Enseguida se propone que los estudiantes resuelvan la actividad provocadora de modelos que consta de dos partes. En la primera los estudiantes proponen un modelo del desarrollo del talento como cantantes de los actores o personajes, de acuerdo con la información proporcionada acerca de ellos (Figura 1), tomando como dominio el tiempo de la serie.

Figura 1

Parte I. Actividad provocadora de modelos sobre la serie televisiva *Glee*, de la cadena Fox, presentada del 2009 al 2015

La serie *Glee*, constó de 6 temporadas anuales de 2009 a 2015. En los actores que interpretaron a los personajes se puede hablar de que intentaron desarrollar su talento como cantantes. ¿Qué fue de las carreras como cantantes de algunos de sus protagonistas?

Lea Michele, actriz, autora y cantante estadounidense de teatro, cine y televisión. Con una voz de soprano poderosa, interpretó a Rachel Berry en dicha serie. Activa a la fecha como cantante. Con talento desarrollado previamente a la serie y ambición por el canto, en todo momento.

Chris Colfer, actor, cantante y escritor estadounidense. Interpretó a Kurt Hummer en *Glee*, con voz de contratenor, recibió varios premios por su actuación entre los que se encuentra el Globo de Oro como mejor actor de reparto de serie o miniserie o telefilme 2010. A partir del 2012 es reconocido como escritor de libros infantiles dejando, poco a poco, en el olvido el canto. Desarrolló su talento y ambición como cantante durante la serie, sin embargo, en algún momento -dentro de las temporadas de la serie- de manera drástica dedica menos tiempo al canto pues su ambición cambia a otro de sus talentos: escribir cuentos.

Cory Monteith, fue actor y músico canadiense. Interpretó a Finn Hudson en la serie, con voz de barítono. Falleció en julio de 2013 cuando iniciaba la quinta temporada de la serie. Desarrolló su talento y ambición como cantante durante la serie, hasta su muerte.

Darren Criss, actor, cantante y compositor estadounidense. Interpretó a Blaine Anderson en dicha serie. Con voz de tenor está vigente como cantante. Desarrolló su talento y ambición como cantante durante la serie aunque ya tenía tablas desarrolladas antes de que fuera contratado, en la segunda temporada.

Lauren Potter, actriz, defensora de personas con discapacidades y comedianta estadounidense. Interpretó a Becky Jackson, personaje secundario, animadora con síndrome de Down en la serie. Sin talento ni ambición como cantante. Su participación termina al final de la quinta temporada.

Vanessa Lengies, actriz, cantante y bailarina canadiense. Interpretó a Sugar Motta en *Glee*, un personaje con voz desafinada y que con el tiempo va mejorando. Aquí el personaje no tiene desarrollado su talento, pero sí tiene una gran ambición. En este caso, se considera más al personaje que a la actriz. El personaje aparece en la tercera temporada y desaparece al final de la quinta abandonando el canto.

¿Cómo pueden representar el desarrollo del talento como cantantes, de cada uno de los actores o su personaje, de manera que lo puedan comparar durante el tiempo que estuvo vigente la serie? Tengan en cuenta que solo el caso de *Vanessa Lengies* es tratado con base en el personaje en lugar de como la actriz. Justifiquen en cada caso el por qué de la representación propuesta. ¿Cómo describirían el desarrollo del talento como cantantes de los personajes desde que inició la serie en el año 2009 hasta su conclusión en 2015?

Fuente: Elaboración propia.

En la segunda parte de esta actividad los estudiantes identifican momentos cruciales y decisivos en el desarrollo de talento de los personajes (Figura 2).

Figura 2

Parte II. Actividad provocadora de modelos sobre la serie televisiva *Glee*, de la cadena Fox, presentada del 2009 al 2015

Desde la representación propuesta, ¿pueden identificar momentos cruciales y decisivos del desarrollo de talento de los participantes? Por supuesto, dos de ellos se presentan al principio y al final de la serie. Pero en los momentos intermedios, ¿pueden distinguir algún momento que sea crucial?

Fuente: Elaboración propia.

Además se solicita que propongan posibles situaciones donde establezcan un guion asociándolo a una representación gráfica (Figura 3). El objetivo es propiciar exploraciones en la cercanía a un determinado momento, discutiendo las interpretaciones generadas.

Figura 3

Actividad de exploración. Talento y expectativa

Imaginen y describan algunas situaciones en el guion de personajes ficticios en donde se pueda observar el desarrollo de su talento en el tiempo y se hagan evidentes momentos en los que:

- I. El desarrollo del talento y la expectativa de este sean coincidentes.
- II. El desarrollo del talento y la expectativa no sean coincidentes.
- III. Se desarrolle el talento y la expectativa sea nula.
- IV. No se desarrolle el talento y que sí se tenga la expectativa de desarrollo.
- V. No se desarrolle el talento y no haya expectativa de desarrollo.

Para cada personaje proporcionen en una sola gráfica el desarrollo de talento y la expectativa en el momento solicitado.

Fuente: Elaboración propia.

Más adelante en la sección de resultados en la Fase 1 se ofrecen detalles de las expectativas del diseño.

Contexto, participantes y recolección de datos

La experimentación de la secuencia tuvo lugar en un curso propedéutico de la Licenciatura en Matemáticas en una universidad mexicana, con un grupo de 37 estudiantes recién egresados de la educación media superior y con edad promedio de 18 años. Ellos cursaron sus estudios por más de un año en modalidad virtual dadas las condiciones de la pandemia de COVID-19 iniciada a principios del año 2019. Los estudiantes provenían de diferentes bachilleratos, se solicitaron los permisos necesarios con las autoridades del plantel de nivel superior al que los estudiantes ingresaron interesados en cursar la Licenciatura en Matemáticas. En el grupo manifestaron que principalmente habían tenido experiencias de enseñanza expositiva en la cual se les explicaba un tema (mediante un video o en sesión síncrona en línea) y se les dejaban ejercicios para practicar lo explicado; en general refieren un escaso tratamiento de ideas asociadas a la materia de cálculo diferencial en el año de enseñanza virtual.

La organización del trabajo en el aula fue primero grupal para presentar la situación y asegurarse de que los estudiantes habían entendido la tarea, previamente se organizaron 12 equipos de entre tres y cuatro participantes cada uno y ellos eligieron un nombre de un matemático o una matemática con la que se sintieran identificados una vez que investigaron sus biografías (Ptolomeo, Curie, Hilbert, Lamarr, Weierstrass, Hooper, Mirzakhani, Riemman, Russell, Kepler, Brower y Wiles). Posterior-

mente tuvieron lugar presentaciones grupales de las producciones en equipo. En la implementación participaron dos docentes, una de ellas además investigadora y uno que apoyó para el monitoreo, la recolección de evidencias y para coordinar las presentaciones grupales.

Los datos recolectados durante la intervención fueron fotografías de las producciones de los equipos, notas de campo y videos de las exposiciones en plenaria. Las evidencias fueron analizadas por la maestra que estuvo frente a grupo, así como por los investigadores separadamente para crear categorías de manera inductiva a fin de entender el razonamiento que evidenciaron, de manera verbal y escrita, los estudiantes durante el trabajo colaborativo y las representaciones para resolver la situación. Los resultados anteriores fueron discutidos entre maestra e investigadores para llegar a acuerdos por triangulación. Posteriormente se condensaron los datos, agrupándolos en las categorías convenidas de acuerdo a las representaciones gráficas utilizadas: discretas, utilizando áreas con dos o más variables, lineales a trozos y suaves. En las presentaciones de sus producciones en plenaria, la atención se centró en la interpretación de la situación y los argumentos que ofrecían para justificar su representación gráfica de la situación, además de identificar aquellos que permitían establecer conexiones con el sistema conceptual de *límite*.

RESULTADOS

Se muestran los resultados del diseño y la implementación en el aula, organizados de acuerdo con las fases de la metodología.

Fase 1. Preparación para el experimento: análisis prospectivo

En esta fase, además de diseñar las actividades propuestas a los estudiantes (figuras 1, 2 y 3), se anticiparon posibles respuestas derivadas de pilotos con personas que no participaron en la fase 2 (estudiantes de primeros semestres de licenciatura y docentes de bachillerato). Dichas actividades se sugieren para introducir el concepto de *función* cuyo dominio es el tiempo (desarrollo de talento) y variantes que puedan surgir en una misma función basadas en lo que se espera en un momento dado (ambición o expectativa), es decir, situaciones cruciales que generen cambios en la regularidad de la representación gráfica.

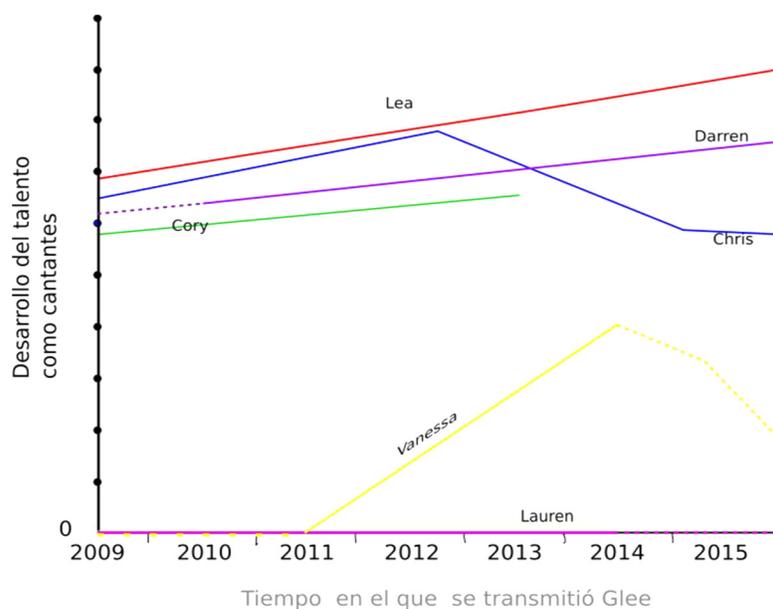
En la actividad de calentamiento se presenta un tráiler sobre la serie *Glee*, esperando acercar a los estudiantes al contexto, debido a que la sexta y última temporada se presentó en el año 2015. En la actividad provocadora de modelos (Figura 1) se esperaba que la información dada fuera un buen indicio para que los equipos pudieran describir el comportamiento del desarrollo del talento de cada uno de los personajes o actores mencionados, mediante funciones lineales o lineales a trozos (como se anticipa en la Figura 4), o incluso que lo expresaran como combinaciones

de lineales, lineales a trozos y de funciones “suaves” (Figura 5); en todos los casos se esperaba que estas funciones o representaciones arrojaran valores reales. Esto puede ocasionar dificultades para tratarlas en momentos específicos, lo que les daría el carácter de funciones discretas. Otra situación que se puede presentar es el valor que darían los estudiantes a cada punto en el intervalo, el cual podría ser de orden cualitativo o cuantitativo, según su interpretación. El modelo se presentaría de forma gráfica. Aún si el valor fuera cualitativo se le podría asignar un valor numérico. La idea principal era que en los equipos propusieran la función definida en un punto, como el desarrollo de talento en un momento dado.

En las figuras 4 y 5 se presenta una propuesta anticipada (basada en las pruebas piloto) de modelos lineales, lineales a trozos y suaves de cada personaje, en términos de la descripción basada en el tiempo.

Figura 4

Ejemplo de gráficas esperadas: lineales a trozos



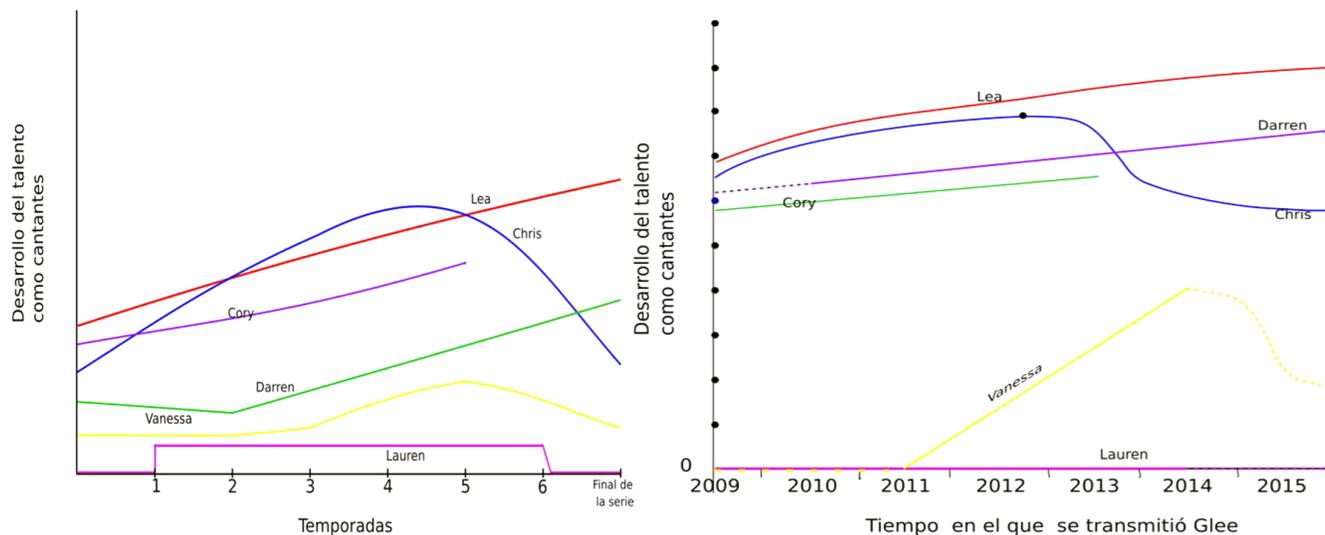
Fuente: Elaboración propia.

Especificando más detalles, se espera en las descripciones de las funciones de los equipos que:

- Identifiquen y representen la relación positiva entre el tiempo dedicado al canto y el desarrollo del talento.
- Definan las funciones en todo el tiempo que duró la serie y, dado que todos menos *Becky* en algún momento mostraron habilidades como cantantes, las funciones sean crecientes en algunos momentos, y en general, haya crecimiento entre el inicio y el fin de la serie.

Figura 5

Ejemplo de representaciones esperadas: suaves y lineales a trozos



Fuente: Elaboración propia.

- c) Las representaciones o funciones no tomen valores negativos, pues no podríamos hablar de talento negativo.

En la segunda parte de la actividad provocadora de modelos (Figura 2) se buscaba que en los modelos propuestos se pudiera analizar la secuencia de las escenas como suele hacerse cuando una persona ve las películas en la plataforma, con las facilidades de adelantar y retroceder escenas, es decir, estudiar el comportamiento en momentos cercanos a uno dado. Esta facilidad no se presentaba en la televisión de los canales tradicionales y nos brinda una buena oportunidad para desarrollar la noción de cercanía a un momento crucial a través del análisis de sucesiones de escenas. La idea era introducir la exploración en momentos cruciales mediante el proceso de: 1) asociar un punto al momento crítico; 2) analizar lo que ocurre con la función antes y después de ese punto, y 3) verificar la coincidencia observada al acercarse a dicho momento con el valor asignado al desarrollo de talento en ese momento (valor funcional).

Se esperaba que el profesor cerrara la discusión estableciendo la analogía entre *desarrollo de talento/ expectativa y valor de la función*. Para ello, se le puede llamar “expectativa” del talento en un momento al valor que se obtiene por la tendencia de la gráfica del desarrollo de talento (antes y después de ese momento). Así, el talento es la valoración real en ese momento, mientras que la expectativa es lo que se “espera”, según el comportamiento de la gráfica.

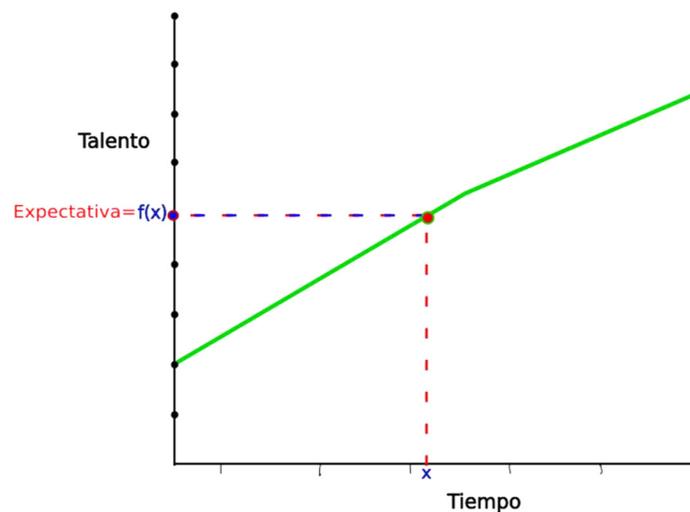
La expectativa del actor de ser también cantante, en un momento determinado, se puede explorar en la cercanía, es decir, en lo que ocurre a medida que nos acercamos a un momento en el tiempo, como en muchas películas, viendo lo que ocurrió

antes e ir avanzando; o lo que ocurrió después de un suceso crítico, retrocediendo. El guion va dando la pauta a medida que nos acercamos.

En la última actividad (Figura 3) se pretendía propiciar exploraciones en la cercanía a un determinado momento discutiendo las interpretaciones de los estudiantes. Para reforzar el conocimiento generado se invirtió la actividad proponiendo posibles situaciones, donde el alumno estableciera un guion asociándolo a una representación gráfica. Por ejemplo, el joven Jeffrey, integrado recientemente, en el momento de la práctica (3.5) ha mejorado y la tendencia antes y después de ese momento ha sido cercana a la valoración en el momento (3.5), según el reporte dado por el profesor *Schuester*, lo cual es bien visto y vitoreado por los compañeros del grupo de coro, pues recuerdan que en ese entonces lo escucharon cantar “Somewhere only we know” de Keane. Así, una representación gráfica podría ser la Figura 6.

Figura 6

El talento y la expectativa son coincidentes.

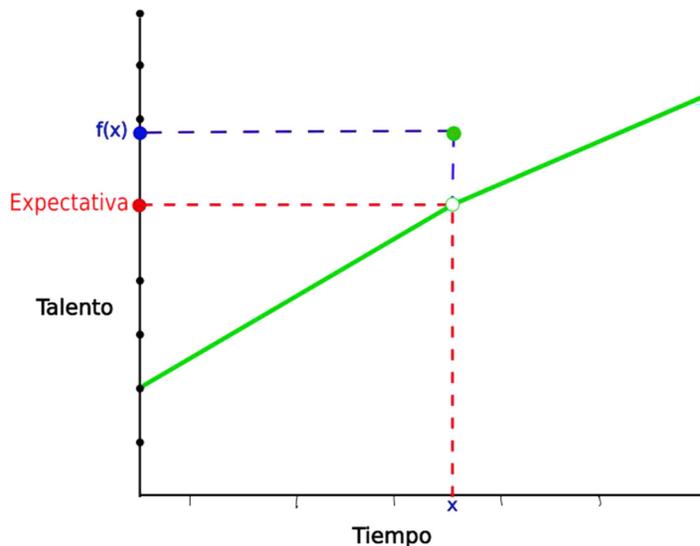


Fuente: Elaboración propia.

Un ejemplo para II) se representa sobre la Figura 7, esta gráfica podría corresponder a un guion como el siguiente: en el momento (3.5), el joven *Gareth* participó en la competencia de coros “Up”, junto con sus compañeros del grupo Glee. El clima del ambiente y la energía del grupo le hicieron mostrar en el escenario una actuación extraordinaria en un solo. Todos ellos cantaron “We are the World”, de Michael Jackson. Sin embargo, la entrenadora de porristas *Sue Sylvester* no dudó en señalar días después que “poco le duró el gusto, pues Gareth seguía igual de mediocre que antes de la competencia”, lo cual lamentablemente fue respaldado por el profesor *Schuester*, indicando sin embargo que le pondría una calificación excepcional en ese momento. Todos sus compañeros no dudaron en darle ánimos.

Figura 7

El talento y la expectativa no son coincidentes en un punto



Fuente: Elaboración propia.

Fase 2. Experimentar para apoyar el aprendizaje

Enseguida se presentan los resultados de los equipos, organizados por tareas.

Resultados de la experimentación. Sesión 1, tarea 1

Se presentó un video de cinco minutos para familiarizar a los estudiantes con el contexto. En él aparece un grupo de actores y pequeños extractos de su paso por una serie televisiva de seis temporadas. Algunos de los estudiantes comentaron que estaban familiarizados con la serie y hablaron de lo que conocían acerca de los actores. Enseguida se les presentó la situación en la cual se describen guiones del comportamiento del desarrollo del talento de los actores como cantantes y la ambición de cada uno de ellos (Figura 1). Con base en la información presentada se les pidió que representaran gráficamente el desarrollo del talento como cantantes de cada uno de los actores o su personaje, de manera que lo pudieran comparar durante el tiempo que estuvo vigente la serie (2009-2015). Los equipos, además de realizar la representación gráfica, indicaron el por qué de la representación propuesta y describieron el desarrollo del talento como cantantes de los personajes durante el tiempo de la serie.

A la luz de los datos obtenidos se propusieron categorías emergentes en consenso con la maestra y los investigadores y se analizaron los resultados de la implementación (Tabla 1).

En la siguiente sección se discute sobre las gráficas producidas por los equipos, considerando las categorías de representaciones de funciones: suaves, lineales a trozos, alternativas y discretas.

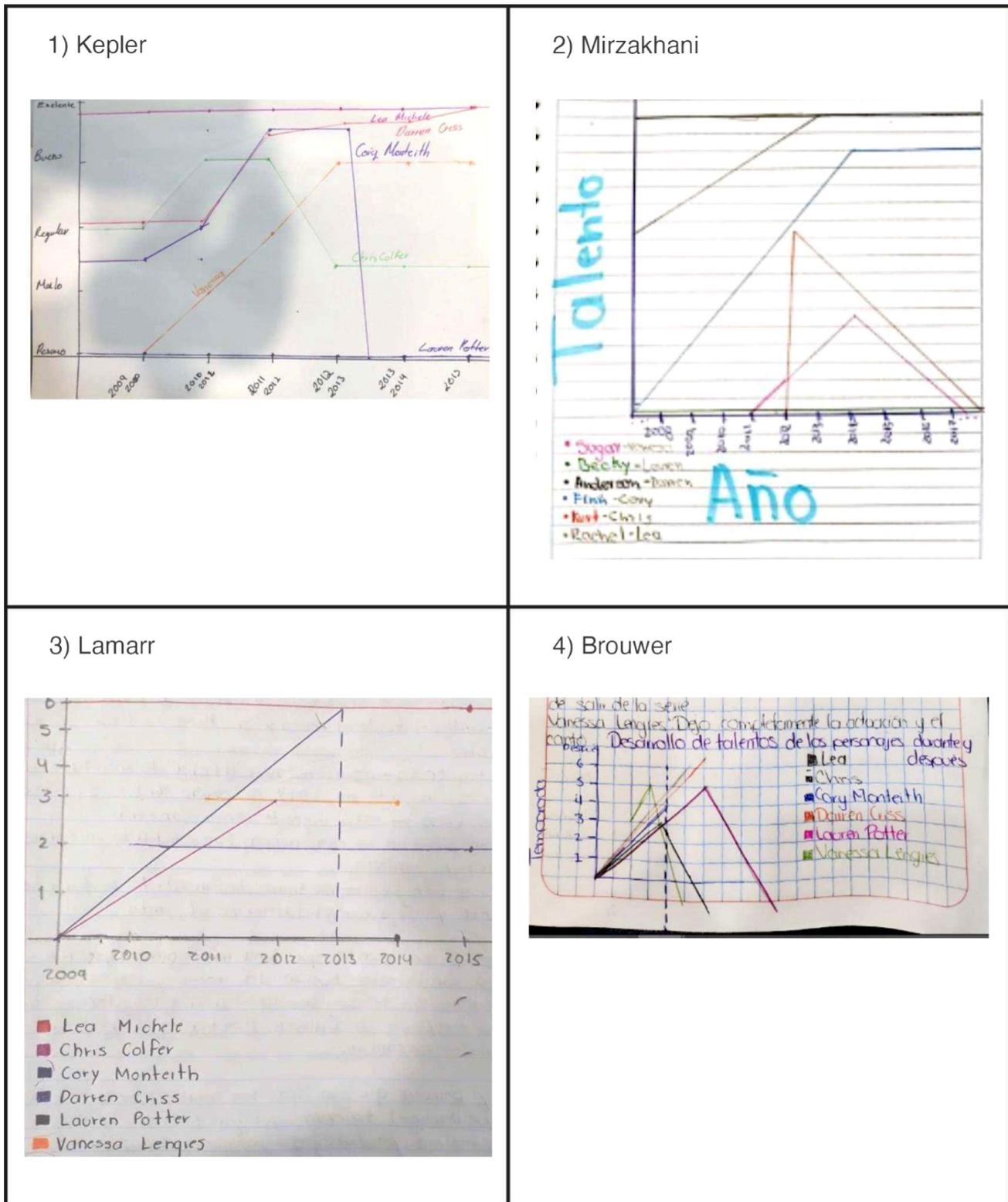
Tabla 1

Representaciones gráficas utilizadas por los estudiantes para interpretar la situación propuesta en la actividad provocadora de modelos (Figura 1)

Representaciones	Equipo y descripción de su representación
<p>Suaves</p> <p>Equipos: Riemann, Weierstrass y Russell (Figuras 8b-5, 8b-6 y 8b-7)</p>	<p>Representan la información con funciones reales continuas y “suaves”, también usan algunas lineales a trozos, cuyo dominio es un intervalo, del tiempo que duró la serie en sus seis temporadas, o bien es un intervalo más amplio que incluye tiempo antes y después de la serie. En el contradominio, representan el nivel de talento como un segmento de línea vertical sin valores, que podemos interpretar como un intervalo de números no negativos que inicia en 0, a personajes sin talento inicial les dan este valor de talento. Así, entienden que puede haber talento nulo, pero no negativo. Además, todos otorgan el máximo valor de talento a <i>Rachel</i>, en cada momento, de hecho, algunos de ellos representan este valor como constante. Todos pudieron identificar momentos cruciales como: la muerte de uno de los personajes (el dominio de su gráfica termina el año en que murió, o la gráfica después de la muerte del actor decrece y es punteada). Otro ejemplo es cuando el talento de Chris disminuye ya que deja de lado su ambición (la gráfica se vuelve decreciente), o el momento en que Vanessa entra al programa (empiezan su gráfica en ese momento, o la empiezan como las demás, pero con valor 0, hasta que entra al programa, y crece), y cuando sale del programa, algunos acaban la gráfica de este personaje ahí, y otros la continúan, pero se vuelve decreciente. Todos los equipos hacen un análisis cualitativo, pues no tenían valores de “talento” ni sabían fechas específicas, este análisis presenta rasgos cuantitativos, dado que asignan “valores” al comparar entre los distintos niveles de talento, aunque sin ser especificados en el eje Y. Es destacable que uno de los equipos representa el desarrollo del talento previo a la serie, durante, y después de que culmina, y que apoya la información otorgada en el texto y video con su conocimiento de la serie o de los actores, por lo que sus gráficas son más detalladas.</p>
<p>Lineales por trozos</p> <p>Kepler, Mirzakhani, Lamarr, Brouwer, (Figuras 8a-1, 8a-2,8a-3, 8a-4) Ptolomeo y Hooper</p>	<p>Las funciones lineales a trozos son presentadas por estos equipos, se observa que Kepler, Ptolomeo y Hooper dan un enfoque cualitativo a las variables que presentan en los ejes X y Y; sin embargo, Kepler parece trabajar las variables de manera discreta, y Ptolomeo y Hooper parecen trabajarlas de manera continua. A diferencia de las tres propuestas anteriores, las de los equipos Mirzakhani y Lamarr se acercan más a lo esperado pues trabajan el dominio en el tiempo, lo que podría llevarles a una función continua, y aunque intentan trabajarlas así, se observan dificultades en los momentos cruciales, por ejemplo, dar una línea vertical en la gráfica sobre un punto, quitándole la característica de función. El equipo Brouwer, a diferencia de los equipos anteriores, coloca la escala del tiempo en el eje Y y sin indicación explícita muestra el crecimiento o decrecimiento del personaje mediante gráficas con picos conforme avanzan las temporadas. En general, presentan las ideas de “desarrollo de talento” y “expectativa” (definición de la función y exploración de la cercanía) en gráficas separadas.</p>
<p>Alternativas</p> <p>Los Curie (Figura 8b-8)</p>	<p>En el análisis realizado para el equipo de Los Curie se observa la representación de la información a través de figuras dentro de una gráfica donde el eje horizontal indica a los personajes y el vertical los años de las temporadas de la serie. Las longitudes de las bases inferior y superior de la figura de cada personaje representan la cantidad de talento en sus primera y última apariciones en la serie. Las longitudes de las figuras se compararon cualitativamente si eran mayor, menor o igual. Los momentos cruciales se identifican de manera implícita en las gráficas, pues el equipo no lo indica explícitamente.</p>
<p>Discretas</p> <p>Wiles y Hilbert</p>	<p>En el equipo Wiles se enfocan en identificar con cada personaje el intervalo de participación en la serie en una línea de tiempo. Al intentar una gráfica bidimensional, en el eje X consideran el número de las temporadas de la serie, mientras que en el eje Y toman en cuenta las mismas temporadas, pero expresadas en años. Por su parte, en el equipo Hilbert establecen una escala de 0 a 10 para medir el talento como cantante, asignan una calificación inicial y una final a cada personaje, organizan la información en una tabla y la extienden a dos gráficas de barras. Calculan los promedios grupales de inicio y final para explicar que, en general, se puede ver un incremento en talento. Al explicar se enfocan en los casos atípicos, es decir que por alguna razón bajaron al final en su desempeño, como es el caso de Chris Colfer al enfocarse en su labor de escritor o Cory Monteith por su deceso en la quinta temporada. Las representaciones de estos equipos son limitadas con respecto a los demás y logran refinar su modelo hasta la presentación grupal de producciones.</p>

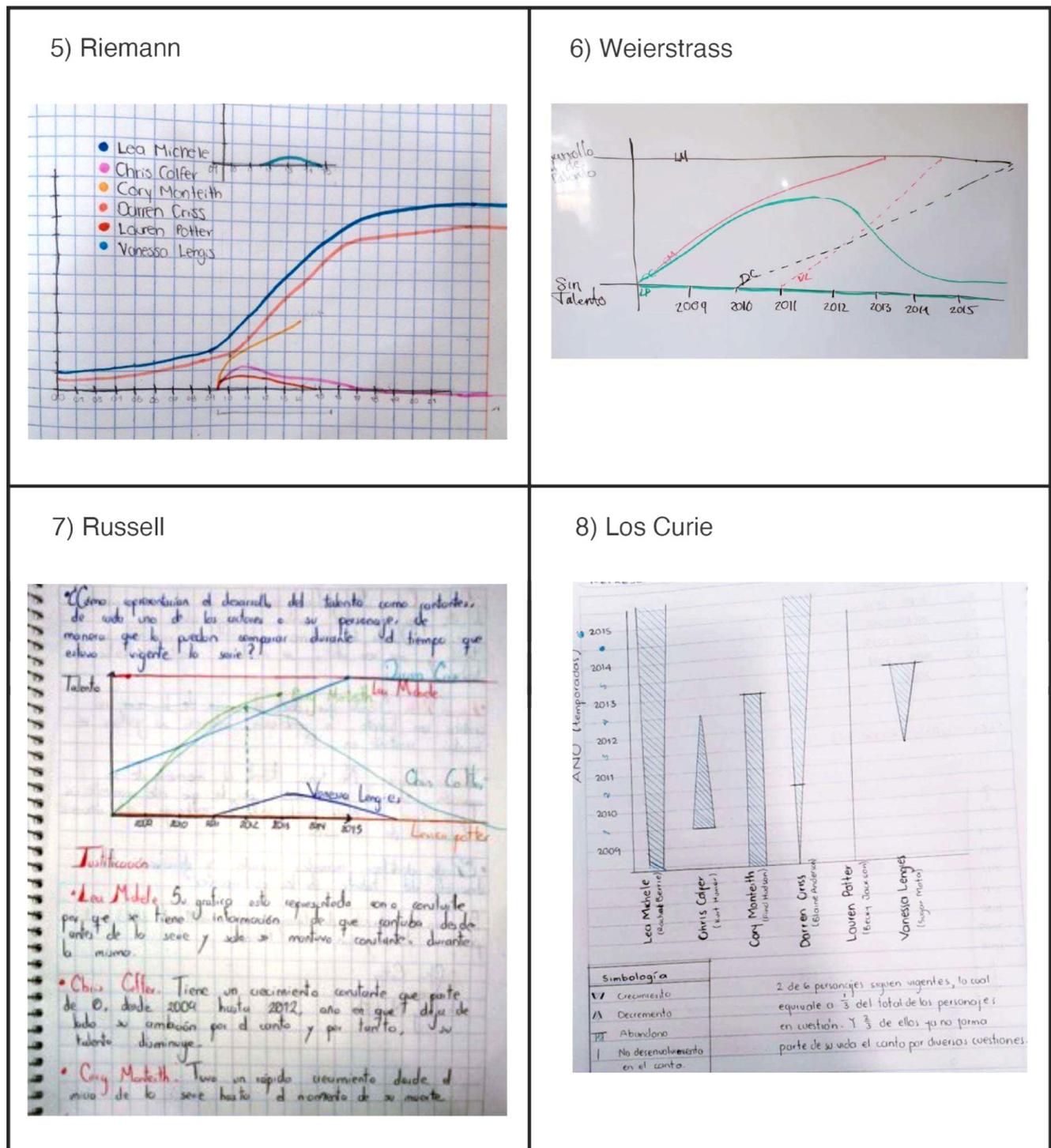
Fuente: Elaboración propia.

Figura 8a
Representaciones de los equipos Kepler, Mirzakhani, Lamarr y Brouwer



Fuente: Producciones de los estudiantes.

Figura 8b
 Representaciones de los equipos Riemann, Weierstrass, Rusell y los Curie



Fuente: Producciones de los estudiantes.

Interpretación funcional de algunas producciones

En el caso de las representaciones alternativas, como la de Los Curie, para interpretar el comportamiento de cada personaje como una función de R en R se podría decir que consideraron el eje vertical como dominio (representando al tiempo de las temporadas que duró la serie) y el contradominio sería, de acuerdo a cada personaje, un intervalo de los reales, intentando asignar la cantidad de talento en un momento dado mediante la longitud de un segmento. Por ejemplo, Lea Michele (*Rachel*) al iniciar la temporada uno (2009) presenta la mayor amplitud de la longitud del extremo inferior en comparación con los demás personajes, esto sugiere la consideración de un mayor talento al iniciar. A lo largo del dominio (en otras temporadas) se visualiza un incremento continuo proporcional (comparando con las producciones de otros equipos podría decirse que lineal). Al valor de la función en el momento que finaliza la serie, se observa que dejan abierto el intervalo en ese extremo, ellos lo interpretaron como la posibilidad de seguir desarrollando/perdiendo talento, aunque la serie termine. En la producción de Chris Colfer y Darren Chriss se reconoce que la información de estos personajes se mezcló y esto no ayudó a la interpretación.

En las producciones discretas, como la del equipo Wiles, al pedirles un modelo para comparar el talento como cantantes de los personajes ellos se enfocaron en el tiempo de permanencia de cada uno en la serie. Lo que tienen en común las producciones discretas (Wiles y Hilbert) es la consideración de dos momentos (inicio y fin), dejando de lado el comportamiento en momentos intermedios.

Resultados de la experimentación. Sesión 2, actividad de exploración de modelos. Talento y expectativa

La conformación de los equipos se mantuvo, todos realizaron guiones sobre personajes ficticios correspondientes con los criterios establecidos (Figura 3). Se nota el cuidado en establecer el dominio como un intervalo de tiempo asociado a la gráfica de la función relacionada con su narrativa, también se identifican los momentos cruciales y de cambio en las gráficas. Por ejemplo, el equipo Ptolomeo creó una historia que se llama “El coro del jardín”. Entre los personajes se refiere a *Margarita* para ilustrar que el desarrollo de talento y la expectativa no son coincidentes.

Aunque no fuese la mejor cantante su esfuerzo nunca cedería e iría en aumento gracias al apoyo de su familia de asteráceas. Margarita a pesar de su esfuerzo y mejoría siempre se ha visto opacada por su amiga Panchita, la tulipán, quien tiene un gran talento en el canto. Esto la ha llevado a deprimirse y tener momentos en donde lo esperado en sus presentaciones de canto ha disminuido condicionado a la precedente actuación brillante de Panchita, ocurriendo esto en más de una ocasión [Extracto de producción del equipo Ptolomeo].

En suma, esta actividad ha permitido que la mayoría de los equipos recreen una situación con numerosos elementos cualitativos de los que pueden extraer información para proponer escalas de valores y representar gráficamente las situaciones.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Como lo sugieren Christensen y West (2018), un artículo que reporte una investigación de diseño debe contener la descripción del proceso de diseño fundamentado en teorías del aprendizaje –los principios de diseño de la PMM en este estudio– y de los alcances del producto –en este caso la secuencia de desarrollo de modelos (figuras 1, 2 y 3)– para proponer mejoras y que sea de utilidad tanto en la teoría como en la práctica. Por ello, se inicia este apartado con la *fase 3. Análisis retrospectivo*, para revisar aspectos relevantes en el proceso de diseño, implementación con estudiantes y análisis de la secuencia de actividades para proponer mejoras.

Las actividades de modelización fueron una ventana que nos permitió visualizar el pensamiento de los estudiantes en torno a la situación planteada. De esta manera, las ideas exhibidas fueron un punto de partida para planear la instrucción para la enseñanza (Lesh y Doerr, 2003; Doerr, 2016) de funciones que no son las que usualmente se tratan en la educación previa a la enseñanza universitaria, llegando a formalizarlas.

En esta experiencia los hallazgos son consistentes con el argumento de Makonye (2014) referente a que las representaciones múltiples que comienzan con lo informal y cotidiano y luego progresan gradualmente hacia lo formal y abstracto ayudan a los alumnos a comprender ideas en matemáticas.

Un hallazgo en las producciones e interacciones con los equipos nos deja ver el desarrollo de argumentos cualitativos, al igual que en estudios como los de Pérez-Oxté y Cordero (2022), para visualizar puntos cruciales en las gráficas en las que representan el desarrollo de talento con respecto al tiempo. Asimismo, la mayoría de los equipos al explicar acerca del comportamiento en esos puntos hablaban de lo que ocurría antes o después. Esto es algo que se puede aprovechar para explorar la esencia geométrica que relaciona distancias y cercanía, lo cual es de suma importancia para estudiar posteriormente la noción de límite y continuidad.

También se observó que en los escenarios, en los cuales el desarrollo de talento en un momento determinado se comporta de la misma manera que lo esperado (expectativa), la representación gráfica reflejaba dicho comportamiento ya sea linealmente a trozos o en forma suave (Tabla 1 y figuras 8a y 8b).

En la actividad de exploración de modelos (Figura 3), en la cual se pedían guiones que reflejaran otras situaciones, se observó lo siguiente: En el caso I), “El desarrollo del talento y la expectativa de este sean coincidentes”, es decir, que la expectativa o lo esperado coincida con el valor de la función en el momento determinado, esto no representó un problema para ellos. Sin embargo, en el caso II), cuando la expectativa y el valor de la función no coincidían en un punto dado, solo dos equipos lograron explicar esto (en un sentido equivalente a la Figura 6). En los casos III) al V) se considera que el contexto y el lenguaje limitan el surgimiento de las representaciones y sostener la conexión fiel con la matemática.

Lo anterior sugiere que para el rediseño en el caso II) se integre con la primera parte de la actividad agregando el pasaje en el que el talento y la ambición no son coincidentes, tal como se sugiere en el ejemplo de *Gareth* (Figura 7); mientras que para abordar los casos del III) al V) se requiere desprenderse del contexto extramatemático. Profundizar en el caso II) apoyaría a que de manera informal se propicie un entendimiento de que dos procesos suceden de manera coordinada y simultánea: uno en el que la variable independiente (el tiempo) se acerca a un valor y otro en el que la variable dependiente (talento) se acerca a otro valor. Esto explícitamente ayudaría en un futuro a entender que no siempre sucede que si una función está definida en todos los números se le puede calcular el límite en cualquier valor; mientras que el caso I) abonaría a revertir la idea de que el límite de una función en un valor solo se calcula evaluando la función en dicho valor, esto al centrarse en lo que sucede en una vecindad del punto o un conjunto de puntos cercanos y no solo en el punto específico.

En un experimento de enseñanza se deben validar los principios en los que se fundamenta el diseño, en este caso los principios fueron los de la PMM (Lesh et al., 2000). En el *principio de construcción de modelos* referente al diseño de actividades provocadoras de modelos, los estudiantes generaron diferentes modelos (Tabla 1) para abstraer información de un contexto de desarrollo de talento y la expectativa en un momento dado de los personajes participantes en la narrativa. Las actividades cumplen con el *principio de la realidad* sugerido en la PMM; surge en el mundo no matemático y para darle significado parten de sus recursos cognitivos y experiencias previas (tanto escolares como del contexto), ellos ven un propósito, las actividades de modelización funcionan como una ventana a su pensamiento (Lesh et al., 2000) y provocan una *necesidad intelectual* (Harel, 2013) de representar la situación y acercarse a nuevos conceptos.

Dichos modelos concedieron significado a la experiencia y fueron comunicados (*principio de documentación*) a través de representaciones gráficas y narrativas, como lo sugiere la PMM (Lesh y Doerr, 2003), que transmitían el comportamiento de los personajes en el tiempo. Cuando se les pedía indicar un momento crucial acudían al comportamiento en la cercanía, momentos antes y momentos después, como se anticipó en la fase 1. Este contexto social de la serie *Glee*, que propone la diversidad como valor (González, 2011), interesó francamente a los estudiantes e incluso permitió que propusieran considerar más variables que pudieran capturar talentos diferenciados, y esto los llevó a sugerir modelos de gráficos de telaraña como extensión. No obstante, una de las limitaciones, proveniente del contexto, para explorar los casos III) al V) de la actividad de exploración de modelos (Figura 3) ha sido el tiempo como dominio de la función, esto abre posibilidades futuras para extender este trabajo buscando y experimentando otras situaciones cuyos contextos permitan mejores aproximaciones informales.

Lo anterior es consistente con Harel (2013), quien señala que a medida que los estudiantes progresan en las representaciones de sus modelos las matemáticas se con-

vierten en parte de su mundo y los problemas matemáticos “abstractos” se vuelven igualmente reales. Aquí, para significar al concepto de *función* se ha utilizado la situación de desarrollo de talento, sin embargo, es preciso que este concepto abstracto en el mundo matemático sea igual de real; esto pone de manifiesto lo complejo de encontrar una situación fundamental –asumida su existencia en Harel (2013)– apropiada para darle significado a conceptos como funciones, límites, continuidad. Así, las ideas y relaciones expuestas por los estudiantes motivan una reflexión sobre qué se puede ajustar de la instrucción para dar continuidad a las ideas y relaciones generadas con esta secuencia.

En matemáticas es importante explorar momentos cruciales y la noción de cercanía o el comportamiento de una función cerca de esos momentos cruciales. Así, experiencias de este tipo nos ayudan a conectar con actividades intramatemáticas en las cuales se profundice en esto.

Este trabajo aporta una secuencia de actividades para explorar las ideas de los estudiantes y extenderlas para acompañarlos desde la intuición hacia la construcción de representaciones gráficas que toman información cualitativa que le da significado a lo que aprenden y los ayuda a la formalización de ejemplos de funciones que no son convencionales en cursos preuniversitarios. Esta contribución puede ser de utilidad para docentes que deseen conducir una intervención en el aula y para investigadores que tomen la experiencia para conducir otra iteración del diseño de la secuencia con la intención de mejorarla.

REFERENCIAS

- Bakker, A., y van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. En A. Bikner, C. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to qualitative research in Mathematics education* (pp. 429-466). Springer. https://dx.doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16
- Borba, M., Villarreal, M., y da Silva (2016). Modeling using data available on the internet. En C. R. Hirsch y A. R. McDuffie (eds.), *Annual perspectives in Mathematics education 2016: Mathematical modeling and modeling Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Camacho, A., Valenzuela, V., y Caldera, M. I. (2017). Modelización de una actividad de la física para mejorar la enseñanza del concepto de función. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 8(15), 57-67.
- Carreira, S., y Blum, W. (2021a). Modelação matemática no ensino e aprendizagem da matemática: Parte 1. *Quadrante*, 30(1).
- Carreira, S., y Blum, W. (2021b). Modelação matemática no ensino e aprendizagem da matemática: Parte 2. *Quadrante*, 30(2).
- Cobb, P., y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science* (pp. 68-95). Routledge.
- Christensen, K., y West, R. E. (2018). The development of design-based research. En R. West (ed.), *Foundations of learning and instructional design technology*. Pressbooks. <https://pressbooks.pub/lidtfoundations/chapter/design-based-research/>
- Doerr, H. M. (2016). Designing sequences of model development tasks. En C. R. Hirsch y A. R. McDuffie (eds.), *Annual perspectives in Mathematics education 2016: Mathematical modeling and modeling Mathematics* (pp. 197-201). National Council of Teachers of Mathematics.
- González de Garay, B. (2011). Glee: el éxito de la diferencia. *Sesión no Numerada. Revista de Letras y Ficción Audiovisual*, (1), 47-59. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3658634>
- Harel, G. (2013). Intellectual need. En Leatham, K. (ed.), *Vital directions for Mathematics education research* (pp. 119-151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6977-3_6

- Hirsch, C. R., y McDuffie, A. R. (eds.) (2016). *Annual perspectives in Mathematics education 2016: Mathematical modeling and modeling Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Lakoff, G., y Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from: how the embodied mind brings Mathematics into being*. Basic Books.
- Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on Mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh y H. Doerr (eds), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on Mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teachers. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Research design in Mathematics and science education* (pp. 591-646). Lawrence Erlbaum Associates.
- Leung, F. K. S., Stillman, G. A., Kaiser, G., y Wong, K. L. (eds.) (2021). *Mathematical modelling education in East and West*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6>
- Makonye, J. P. (2014). Teaching functions using a realistic Mathematics education approach: A theoretical perspective. *International Journal of Educational Sciences*, 07(03), 653-662.
- Montero, L. E., Vargas, V., y Rodríguez, I. I. (2020). Sistemas conceptuales al implementar actividades provocadoras de modelos. En *Mathematics education across cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1653-1661). <https://doi.org/10.51272/pmena.42.2020-261>
- Moreno, S., y Alvarado, A. (2021). La modelización como vehículo para el desarrollo del razonamiento covariacional en educación secundaria. *Cuadrante*, 30(2), 147-178. <https://doi.org/10.48489/cuadrante.23687>
- Núñez, R. (2020). The cognitive science of Mathematics: Why is it relevant for Mathematics education? En R. Lesh, E. Hamilton y J. Kaput (eds.), *Foundations for the future in Mathematics education* (pp. 127-154). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003064527-7>
- Pérez-Oxté, I., y Cordero, F. (2022). Modelling and anticipation of graphical behaviors in industrial chemical engineering: The role of transversality of knowledge in learning Mathematics. En M. Rosa, F. Cordero, D. C. Orey y P. Carranza (eds.), *Mathematical modelling programs in Latin America* (pp. 269-290). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-04271-3_13
- Priestley, W. M. (1979). *Calculus: An historical approach*. Springer-Verlag.
- Rosa, M., Cordero, F., Orey, D. C., y Carranza, P. (eds.) (2022). *Mathematical modelling programs in Latin America*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-04271-3>
- Suárez, L., y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 3(1), 51-58. <https://doi.org/10.54343/reiec.v3i1.336>
- Sun, J. M., Wickstrom, M. H., y English, L. D. (eds.) (2021). *Exploring mathematical modeling with young learners*. Springer. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10091-8>
- Toro, J., Villa, J., y Téllez, L. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 87-115. <https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/506>
- Trigueros, M. (2023). *Uso de la modelación en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales*. Congreso de la Sociedad Mexicana de Investigación en Matemática Educativa.
- Tuyub, I., y Buendía, G. (2017). Gráficas lineales: un proceso de significación a partir de su uso en ingeniería. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 8(15), 11-28. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15.44
- Vargas, V., Reyes, A., y Escalante, C. (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. *Educación Matemática*, 28(2), 59-83. <https://doi.org/10.24844/em2802.03>

Cómo citar este artículo:

Soria Pérez, A., Alvarado Monroy, A., y Pacheco Juárez, Y. (2024). Diseño y experimentación de una secuencia de modelización para revelar ideas de funciones. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 15, e1973. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v15i0.1973



Todos los contenidos de *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH* se publican bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial 4.0 Internacional, y pueden ser usados gratuitamente para fines no comerciales, dando los créditos a los autores y a la revista, como lo establece la licencia.