

# IDEAS FUNDAMENTALES DE ESTOCÁSTICOS EN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: UNA ALTERNATIVA DE ENSEÑANZA

## FUNDAMENTAL IDEAS OF STOCHASTICS IN PRIMARY EDUCATION TEXTBOOKS: TEACHING ALTERNATIVE

---

LÓPEZ-MOJICA José Marcos  
OJEDA SALAZAR Ana María  
SALCEDO PRADO Jesús

---

RECEPCIÓN: MARZO 2 DE 2018 | APROBADO PARA PUBLICACIÓN: JULIO 10 DE 2018.

---

### Resumen

En el Sistema Educativo Nacional Mexicano, la probabilidad y la estadística son las disciplinas más desatendidas a pesar de ser importantes en la solución de problemas de la vida cotidiana. Impera el culto al número, lo que limita el desarrollo de los pensamientos probabilístico y estadístico. El presente documento tiene como objetivo identificar las ideas fundamentales de estocásticos en las lecciones de los libros de texto del primer ciclo (primer y segundo grados) de la educación primaria en México y evidenciar que estos convocan una red conceptual. Lo anterior permitiría su introducción en el aula por parte de los docentes. Bajo un enfoque

José Marcos López-Mojica. Profesor-investigador de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Es doctor en Ciencias, Especialidad en Matemática Educativa, por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores y trabaja las líneas de investigación "Comprensión de la probabilidad en el nivel básico" y "Matemática educativa inclusiva". Correo electrónico: mojjicajm@uagro.mx. ID: <https://orcid.org/0000-0002-7330-9979>.

Ana María Ojeda Salazar. Investigadora titular del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. Tiene doctorado en Filosofía, Especialidad en Educación Matemática, por el King's College, Londres, Inglaterra. Su línea de investigación es "Comprensión de ideas fundamentales de probabilidad y de estadística en el Sistema Educativo Mexicano". Correo electrónico: amojeda@cinvestav.mx. ID: <https://orcid.org/0000-0001-7918-7557>.

Jesús Salcedo Prado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. Es ingeniero bioquímico por el Instituto Tecnológico de Jiquilpan. Trabaja la línea de investigación "Comprensión de la probabilidad en el nivel medio superior". Correo electrónico: jsalcedo@cinvestav.mx. ID: <https://orcid.org/0000-0003-2991-3041>.





el nivel superior (Angoa, 2002; De León, 2002; Torres, 2013), han documentado un escaso tratamiento de los estocásticos en el sistema educativo nacional.

Esta deficiencia también se refleja, en el mejor de los casos, en la comprensión de los estocásticos de los docentes de matemáticas (Ojeda, 2006) o en la ausencia de su conocimiento. Ojeda (2007) exhibe esta carencia en los planes y programas de estudio mexicanos. Al parecer, los temas de probabilidad y de estadística son colocados “a manera de cubrir espacios” en el currículo, o bien se les remite a tareas en casa o se ejercitan otros conceptos matemáticos (Ojeda, 2006). Lo anterior ocasiona que los docentes no desarrollen los temas en cuestión en el aula, favoreciendo así el pensamiento determinista, pues los omiten por el desconocimiento de las disciplinas.

Al respecto, Flores (2002) señala en su investigación que la carencia del conocimiento estocástico por parte del profesor en servicio de educación básica obstaculiza el desarrollo de la intuición probabilística en el niño. En ese sentido, Carballo (2004) reveló que en la enseñanza de la probabilidad en el aula de educación primaria regular persiste la inadvertencia de ideas fundamentales de probabilidad en las lecciones del libro de texto por parte de los docentes. Estos manifestaron indiferenciación entre lo imprevisto y lo imprevisible (Piaget e Inhelder, 1951) y la consideración del número como único objetivo del eje predicción y azar, infiltrada en la práctica docente en el aula como énfasis en el determinismo.

Por su parte, Martínez y Ojeda (2017) se interesaron por la comprensión de elementos de estadística descriptiva en la formación de profesores de primaria regular. Ataño el señalamiento de una reciente incorporación de los estocásticos en el currículo para profesores de primaria regular. Se destina, en el cuarto semestre, la materia “Procesamiento de la información estadística” con cuatro unidades: estadística, probabilidad y muestreo, inferencia estadística y vinculación con el eje manejo de la información. Además, analizaron los libros de texto de este nivel educativo, y como resultado expresan que solo en seis lecciones se tratan los conceptos de medida de tendencia central, si bien aparecen al final de los bloques para cuarto, quinto y sexto grados.

Un medio fundamental en la enseñanza de los conceptos matemáticos es el libro de texto (Ojeda, 2006; Marroquín, 2009; López-Mojica, 2013). Es una de las herramientas que permite a los docentes la introducción y/o constitución del contenido matemático; sirven de guía para el proceso de enseñanza y aprendizaje. La limitante está en que es común que el docente utilice las lecciones de manera puntual, paso a paso, como el medio lo presenta, como guía de su enseñanza (Carballo, 2004) sin una reflexión a los conceptos de estocásticos implicados en ellas.

En ese sentido, Marroquín (2009), para identificar la comprensión de los alumnos sobre ideas fundamentales de estocásticos, resultante de su enseñanza con los medios institucionales (libro de texto y programa de cómputo), se interesó por caracterizar el uso de aquellos medios en el tercer ciclo de educación primaria. La autora afirma que, durante la enseñanza en el aula, estos no proporcionan lo necesario para la enseñanza de estocásticos y el docente participante del estudio carecía de una formación en el tema; lo anterior repercute en la comprensión correspondiente de los alumnos. Como ejemplo, argumenta la autora, la dificultad a la que se enfrentaron tanto el docente como los alumnos en la construcción del diagrama de árbol y en su



que parta de un plano intuitivo para arribar a un plano formal, con la pretensión de constituir un pensamiento probabilístico y estadístico.

Por lo tanto, es necesario identificar las lecciones, en los libros de texto del primer ciclo, que contengan a los estocásticos y de esa forma establecer un marco de referencia para su introducción en etapas tempranas. En consecuencia, el presente documento plantea lo siguiente: a) la aplicación de criterios de análisis que permitan la identificación de ideas fundamentales de estocásticos (Ojeda, 1994, 2006) en las lecciones de los libros de texto oficiales de la educación básica; b) la evidencia de que los temas de estocásticos convocan la promoción (Steinbring, 2005) de otros conceptos matemáticos y permiten dotarle de otro sentido por su uso; y, c) de lo anterior se desprende que con los estocásticos se puede establecer una red conceptual para la constitución del pensamiento estocástico.

## 2. ELEMENTOS TEÓRICOS

Ojeda (1994, 2006) propone la perspectiva de *tres ejes rectores* para el estudio de los estocásticos en el sistema educativo mexicano bajo la interrelación de un eje *epistemológico*, uno *cognitivo* y el otro *social*. El primero se orienta por el conocimiento sobre el azar, la probabilidad y la estadística. El segundo concierne a los procesos del pensamiento del individuo relacionados al contenido matemático. En el último se considera al individuo dentro del entorno social que se genera en la institución escolar al recibir el conocimiento de estocásticos.

Por la naturaleza del presente estudio, se toma en consideración solo al eje epistemológico. Bajo este enfoque, toma importancia la propuesta de diez ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) como guía a lo largo de toda la educación de manera continua. Para identificar esas ideas, el autor toma en cuenta el desarrollo de las disciplinas de la probabilidad y de la estadística, las fases de la constitución de la idea de azar en el niño señaladas en los estudios realizados por Piaget e Inhelder (1951) y las dificultades de los adultos frente a situaciones de incertidumbre (Heitele, 1975).

Heitele esquematiza su propuesta para la formación de conceptos de estocásticos resultantes de una enseñanza que transite desde de un plano intuitivo hasta un plano formal. El autor basa ese tránsito en la relación entre modelo y realidad con la pretensión de que el alumno pueda desarrollar un pensamiento científico sustentado en la cotidianidad. La propuesta del currículo en espiral es en el siguiente sentido: en un plano intuitivo, las ideas fundamentales de estocásticos se encuentran “entretejidas” y no se les puede separar para estudiarlas; conforme se estructura un nivel cognoscitivo y lingüístico respecto de ellas, se va arribando a un plano cada vez más formal, donde ya se les puede estudiar por separado, como lo hace la teoría matemática (Heitele, 1975). Las diez ideas fundamentales son: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable aleatoria, ley de los grandes números y muestra.



- Situación. Este término hace referencia a la relación del individuo con su medio ambiente, el cual condiciona, limita, funda y determina posibilidades (Abbagnano, 1974).
- Ideas fundamentales de estocásticos: medida de probabilidad, espacio muestra, regla de la adición, regla del producto e independencia, equidistribución y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable aleatoria, ley de los grandes números y muestra (Heitele, 1975).
- Otros conceptos matemáticos: números naturales y el cero, su orden, operaciones aritméticas básicas, razón y proporción, producto cartesiano, por mencionar algunos.
- Recursos semióticos: gráficas, figuras, diagramas, notación matemática, lengua natural escrita. Ojeda (2006) argumenta que se hace referencia a “recursos semióticos” en lugar de “representaciones semióticas”, ya que esta última frase corresponde a una interiorización de los usos de esos recursos, que no es inmediata a su presentación.
- Términos empleados: las palabras y las frases que aluden a estocásticos, ya sea técnicas o cotidianas (Ojeda, 2006).

Lo anterior desembocaría en el marco de referencia para el tratamiento de fenómenos aleatorios (Fischbein, 1975) de manera sistemática y las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) como guía del currículo en espiral.

#### 4. ESTOCÁSTICOS Y LA PROPUESTA INSTITUCIONAL

En el ciclo escolar 2009-2010, la educación primaria regular en México sufrió una reforma en sus planes y programas de estudio. El principal cambio es el enfoque bajo competencias (SEP, 2009), a las que define como “un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes)” (SEP, 2009, p. 41). La propuesta subraya la articulación curricular de contenidos como requisito fundamental para el cumplimiento del perfil de egreso, entendida como “el conjunto de condiciones y factores que hacen factible que los egresados alcancen los estándares de desempeño: los conocimientos, las habilidades, las actitudes y los valores” (SEP, 2009, p. 37). Para el ciclo escolar 2014-2015 se implementaron nuevos libros de texto en las aulas en nivel primaria, los cuales siguen vigentes hasta la fecha. Son a estos a los que se le aplicaron los instrumentos de la investigación.

Para una revisión más detallada se tomaron en cuenta los planes y programas de estudio de los seis grados escolares. Del resultado del análisis se ha identificado que para la probabilidad no se presenta algún tema en estos; predominan los de estadística, reducidos al cálculo y presentación de uso de tablas, gráficas, pictogramas y diagramas como medios para organizar y comparar datos, como lo había señalado Maldonado y Ojeda (2009). En la tabla 1 se sintetiza el análisis de los estocásticos respecto al bloque y eje temático en los planes y programas de estudio.

De lo anterior se puede señalar: 1) no se identificaron lecciones señaladas en los programas de estudio donde se declare explícitamente el tema de probabilidad;



está implicada una situación aleatoria que pudiera aprovechar la introducción y tratamiento de un fenómeno aleatorio en las aulas.

Por lo tanto, para “Desafíos matemáticos. Primer grado” (SEP, 2014a), de las 57 lecciones distribuidas en cinco bloques se pudieron señalar cinco en las que se puede aprovechar el análisis de un fenómeno aleatorio (SEP, 2014<sup>a</sup>, pp. 11, 22, 47, 62 y 81). Algo similar sucedió para “Desafíos matemáticos. Segundo grado” (SEP, 2014b): de las 59 lecciones que contiene el libro, también distribuidas en cinco bloques, se pueden señalar solo dos lecciones que implican una situación aleatoria (SEP, 2014b, pp. 22 y 115).

Del análisis de las lecciones, ninguna de las que pertenecen al eje “Tratamiento de la información” hacen referencia a los temas de probabilidad. La introducción de los temas de probabilidad y de estadística en el nivel primaria se inicia, según el programa de estudios, en el tercer grado, por lo que en primero y segundo grados se descuida su introducción, contrario a lo señalado por Heitele (1975) y Limón (1995): promover la enseñanza de estocásticos en etapas lo más temprano posible.

A pesar de lo anterior, se pudieron identificar siete lecciones pertenecientes al eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” en las que se pudiera aprovechar la introducción de los estocásticos por medio del análisis de un fenómeno aleatorio en el aula y a las cuales se les aplicó los criterios de análisis; por cuestiones de espacio, en la tabla 2 se señalan las ideas fundamentales identificadas en cada una de las lecciones.

Las siete lecciones presentan como situación aleatoria el resultado al lanzar dados, aros y monedas. En cuatro (“¿Más o menos?”, “Contemos frijolitos”, “Quita y pon”, “Juguemos al cajero”) predomina la idea de ganancia o pérdida; en ellas se puede promover la introducción, de manera cualitativa, de la variable aleatoria por medio de la asignación numérica de las frecuencias relativas.

En las siguientes líneas se presenta el resultado de la aplicación de los criterios de análisis de dos lecciones. Ambas tienen como trasfondo, desde nuestra perspectiva, la idea de variable aleatoria. La lección “Quita y pon” (SEP, 2014a) se ubica en el bloque II en la página 47. Plantea el juego de cartas con dados a manera que los niños coloquen o quiten fichas según los resultados del lanzamiento del dado y de la extracción de la ficha (ver figura 2). Al aplicar los criterios de análisis, resultó:

- a) Situación. La lección implica un fenómeno aleatorio con el resultado del lanzamiento de un dado y la extracción sin ver de una carta (con signo + o -). Además, implica la pérdida o ganancia de fichas según las posibles combinaciones de los puntos del dado con las cartas.
- b) Ideas fundamentales de estocásticos. Para *medida de probabilidad* se apela con el número de casos posibles en relación con el total de casos, algo similar para las tarjetas. Es decir, la probabilidad del evento “obtener una de las caras del dado” es  $P(A) = \frac{1}{6}$  y para la obtención de una tarjeta con un signo es  $P(T) = \frac{1}{2}$ . *Espacio muestra* se identifica con el conjunto de posibles resultados al lanzar un dado  $D = \{1,2,3,4,5,6\}$ , además del conjunto de posibles resultados al extraer sin ver una tarjeta  $T = \{+, -\}$ . Pero también se puede obtener el espacio muestra compuesto:  $\Omega = D \times T = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{+, -\}$ . La *regla del producto* se obtiene dado que tenemos dos eventos independientes; por lo tanto, sus probabilidades



se multiplican. Si al lanzar un dado la probabilidad de uno de los eventos es  $1/6$  y la de tomar una tarjeta es  $1/2$ , entonces la suma es  $8/12$ . Debido a que todas las caras del dado tienen la misma posibilidad de ocurrir, esto implica la idea de *equiprobabilidad*. La *combinatoria* se evidencia con los pares ordenados de las seis caras del dado y las dos tarjetas, de modo que tenemos (1,+), (1,-), (2,+), (2,-), (3,+), (3,-), (4,+), (4,-), (5,+), (5,-), (6,+), (6,-). De manera cualitativa se puede tratar la *variable aleatoria* con la pérdida o ganancia de “fichas”, según la cantidad asignada por cada punto del dado y el signo de las tarjetas.

- c) Otros conceptos matemáticos. Números naturales, suma y noción de signos positivo y negativo. Los números reales se trabajan en los puntos de sus dados, así como la suma de ellos. En las cartas con los signos encontramos la referencia a los números naturales.
- d) Recursos para organizar y tratar los datos. Las tarjetas propuestas (página 123 del libro), fichas y un dado.
- e) Términos empleados. Los verbos como “lanzar” y “tomar” hacen alusión a la realización del fenómeno aleatorio. La palabra “sacar” hace referencia al espacio muestra y la situación “gana” implica la idea de variable aleatoria.

Para la lección “Contemos frijolitos” (ver figura 3), ubicada en la página 22 del primer bloque, se plantea el uso de dos dados, frijoles y una tabla en la que se distribuirán estos. Se determina ganador del juego al alumno que tenga más frijoles al cabo de cierto número de tiradas de los dados. Al aplicar los criterios de análisis resultó:

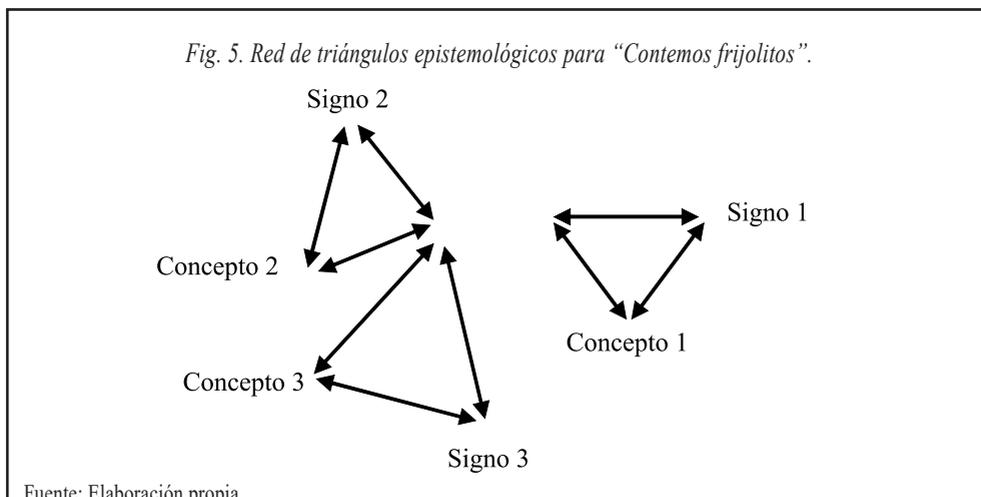
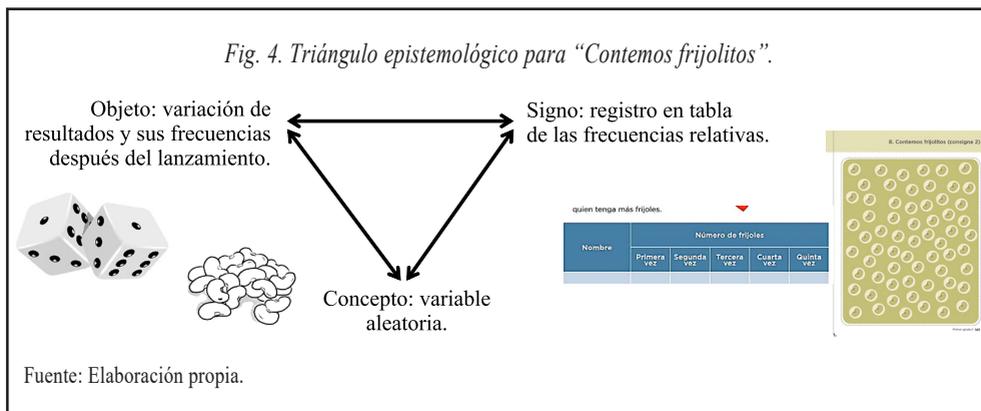
- a) Situación. Organizados en equipos, cada uno debe tener un tablero del material recortable, página 141, y frijoles. Por turnos, cada alumno lanza dos dados y pone en su tablero el número de frijoles que indiquen la suma de los puntos de los dados. Solo deben poner un frijol en cada círculo del tablero; es decir, un frijol por cada punto. Gana quien haya colocado más frijoles en su tablero. No está estipulada la cantidad de lanzamientos que deben realizarse; la actividad finalizará cuando el maestro lo indique.
- b) Ideas fundamentales de estocásticos. Se puede identificar la *medida de probabilidad* en cuanto a la probabilidad que tiene cada una de las caras de cada uno de los dados. Como se solicita la suma de los puntos, entonces se tiene que la probabilidad corresponde a la suma de los puntos de ambos dados. El *espacio muestra* es compuesto, pues se tienen los pares ordenados: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6). La situación implica eventos *independientes* debido a que el resultado del primer lanzamiento en nada afecta al resultado del segundo lanzamiento. La *simetría* se presenta por la distribución de los posibles pares ordenados. *Regla del producto* se identifica a este concepto cuando por ejemplo, para el evento “dos frijoles”, la probabilidad de obtener un punto en un dado es  $P(1 \text{ punto}) = 1/6$  y en el otro dado sería  $P(1 \text{ punto}) = 1/6$ ; por lo tanto, la probabilidad del evento “dos frijoles” es el par ordenado (1,1), lo que es igual  $P(1,1) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ . Para la *variable aleatoria*, la lección implica tres variables, la correspondiente a cada dado distinguible y la correspondiente a la suma de los puntos de los dados; es decir, frecuencia y frecuencia relativa.



nivel de *concepto* la ganancia o la pérdida según la distribución de las frecuencias relativas (véase figura 4).

En la misma vía, la propuesta del triángulo epistemológico (Steinbring, 2005) permite distinguir la constitución del concepto matemático –en este caso, los estocásticos– derivada de la interacción entre objeto, signo y concepto. El significado no se desprende de uno de los vértices del triángulo, sino que requiere de un balance entre ellos, y por tener una naturaleza relacional el concepto es cada vez más perfectible. Según Steinbring (1991), los conceptos de estocásticos no deben deducirse de conceptos elementales, pues a su vez estos requieren de otros conceptos más básicos, desarrollándose una red de triángulos epistemológicos interconectados por uno de sus vértices.

La red se establece cuando a partir del vértice objeto 1 (variación de resultados y sus frecuencias después del lanzamiento) se produzca el signo 2 en el sentido de asignación numérica uno a uno, y así provocar el concepto 2 (número natural). A su vez, el objeto 1 puede relacionarse con un signo 3 (registro en tabla de las frecuencias) y con el objeto 3 (adición de números naturales). En la figura 5 se presenta una propuesta de esquema que sintetiza lo anterior.





- FISCHBEIN, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holland: Reidel.
- FLORES L., P. (2002). *La predicción y el azar: praxis, creencias, saberes y conocimientos del docente de educación primaria* (tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- GURROLA, M. (1998). *Pensamiento probabilístico de niños en estadio básico* (tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- HEITEL, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2), 187-205.
- LIMÓN, A. (1995). *Elementos para el análisis crítico de la posible inserción curricular de nociones estocásticas, ausentes en los programas de preescolar y primaria* (tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- LÓPEZ-MOJICA, J.M. (2009). *Estocásticos en el segundo grado de educación especial* (tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- LÓPEZ-MOJICA, J.M. (2013). *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial* (tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- LÓPEZ, J. (2006). *Comprensión de la ley de los grandes números en el tercer grado de secundaria* (tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- MALDONADO, J. y OJEDA, A.M. (2009). Ideas fundamentales de estadística en educación primaria: una perspectiva epistemológica. *Revista Premisa*, 11(43), 3-10.
- MARROQUÍN M., P. (2009). *Medios y enseñanza de estocásticos en el tercer ciclo de educación primaria* (tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- MARTÍNEZ, A.M. y Ojeda, A.M. (2017). Comprensión de la media ponderada por docentes en formación para primaria. En L. Serna (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 30* (pp. 1125-1136). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- OJEDA, A.M. (1994). *Understanding fundamental ideas of probability at pre-university levels* (tesis de doctorado no publicada). King's College, Londres, Reino Unido.
- OJEDA, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En Filloy (ed.), *Matemática educativa, treinta años* (pp. 257-281). México: Santillana-Cinvestav.
- OJEDA, A.M. (2007). *Probabilidad y estadística en matemática educativa. Seminario de investigación* (manuscrito no publicado, documento interno). México: Cinvestav-IPN.
- OJEDA, A.M., CHÁVEZ, H. y GARNICA, I. (2015). Nociones matemáticas de frecuencia relativa y clases: su comprensión por estudiante sordos (11-24 años). En M. Cruz (ed.), *Manos a la obra: lengua de señas, comunidad sorda y educación* (pp. 187-214). México: Bonilla Artigas Editores.
- PIAGET, J. (1982). *Le possible et le nécessaire*. Francia: PUF.
- PIAGET, J. e INHELDER, B. (1951). *La Genèse de l'idée de Hasard Chez l'enfant*. Francia: PUF.
- RAMOS, A. (2015). *La probabilidad y la estadística en la construcción del pensamiento matemático del niño preescolar* (tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- RIVERA, M.S. (2011). *Comprensión de ideas fundamentales de estocásticos en el bachillerato universitario* (tesis de maestría no publicada), Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- SALCEDO, J. (2013). *Razonamiento probabilístico en el bachillerato tecnológico* (tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- SEP. (1993). *Planes y programas de estudio 1993. Educación básica*. México: SEP.
- SEP. (2009). *Planes y programas de estudio 2009. Educación básica*. México: SEP.
- SEP. (2011). *Planes y programas de estudio 2011. Educación básica*. México: SEP.
- SEP. (2014a). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno (primer grado)*. México: SEP.
- SEP. (2014b). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno (segundo grado)*. México: SEP.

